Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

2. Aufgabenblatt zur Stochastik 1 *Auflage 2*

Abgabe bis **Freitag, 6. November 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 2.I (8 Punkte, *Bonferroni-Ungleichung* und das *Ein- und Ausschlussprinzip*). Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie die *Bonferroni-Ungleichung*:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(A_k\big) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\big(A_i \cap A_j\big) \quad \text{für alle } A_i \in \mathcal{A}, i \in \{1,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie das *Ein- und Ausschlussprinzip* (oder *Siebsatz von Poincaré und Sylvester)*,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<\ldots<k_i\leq n} \mathbb{P}\big(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}\big)$$

für alle $A_i \in \mathcal{A}, i \in \{1,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.II (8 Punkte) (Hilfsresultat zu Lemma 1.13). Sei $\mathcal{G}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem und $d(\mathcal{G})$ das von $\mathcal{G}$ erzeugte Dynkin-System. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{D}_1 := \big\{A \subset \Omega : A \cap B \in d(\mathcal{G}) \text{ für alle } B \in \mathcal{G}\big\}$$

ein Dynkin-System ist.

Aufgabe 2.III (8 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum und seien $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Für eine abzählbare Teilmenge $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \Omega$ sei die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \delta_{x_k}(A) \quad \text{für alle } A \subset \Omega.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert genau dann, wenn $\gamma_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = 1$ gilt.

Aufgabe 2.IV (8 Punkte). Seien $\Omega = \left\{-10^5, \ldots, 10^5\right\}$, $E \subset \Omega$ eine beliebige Teilmenge und $n \in \{1, \ldots, 10^5\}$. Welche der folgenden Mengensysteme sind Dynkin-Systeme, welche sind σ-Algebren?

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &:= \left\{ A \in \mathcal{P}(\Omega) : \sum_{\omega \in A} \omega = 0 \right\}, \\
\mathcal{A}_2 &:= \Big\{ A \in \mathcal{P}(\Omega) : |A \cap \{1, \ldots, n\}| \text{ ist gerade} \Big\}, \\
\mathcal{A}_3 &:= \Big\{ A \in \mathcal{P}(\Omega) : E \subset A \Big\} \cup \{\emptyset\}.
\end{aligned}$$