Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

3. Aufgabenblatt zur Stochastik 1 *Auflage 2*

Abgabe bis **Freitag, 13. November 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 3.I. Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Es seien $\overline{\Omega} = \{-n, -n+1, \dots, n\}$ und $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\overline{\Omega})$. Es bezeichne $\overline{\mathbb{P}}$ die Gleichverteilung auf $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}})$. Zudem sei $\overline{Y} : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, $\overline{Y}(\omega) = |\omega|$ für alle $\omega \in \overline{\Omega}$.

   (i) Geben Sie alle Urbilder der Form $\overline{Y}^{-1}(\{y\})$ für alle $y \in \overline{Y}(\overline{\Omega})$ an.

   (ii) Geben Sie die von $\overline{Y}$ erzeugte σ-Algebra $\overline{Y}^{-1}(\overline{\mathcal{A}})$ an. Bemerken Sie hierzu untenstehende Anmerkung.

   (iii) Bestimmen Sie die Verteilung von $\overline{Y}$ unter $\overline{\mathbb{P}}$.

b) Es seien $\Omega = [-n, n]$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\Omega$. Es bezeichne $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es sei $Y : \Omega \to \Omega$, $Y(\omega) = |\omega|$ für alle $\omega \in \Omega$.

   (i) Geben Sie alle Urbilder der Form $Y^{-1}(\{y\})$ für alle $y \in Y(\Omega)$ an.

   (ii) Bestimmen Sie das Urbild $Y^{-1}(A)$ für eine beliebige Menge $A \in \mathcal{B}_\Omega$.

   (iii) Geben Sie die von Y erzeugte σ-Algebra $Y^{-1}(\mathcal{A})$ an.

   (iv) Bestimmen Sie die Verteilung von Y unter $\mathbb{P}$.

Anmerkung. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Ereignisräume. Eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ heißt *die von einer Abbildung X von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\Omega', \mathcal{A}')$ erzeugte σ-Algebra*, falls

$$\mathcal{F} = \sigma\Big\{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}'\Big\}.$$

Definitionsgemäß muss in diesem Fall stets gelten, dass $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Wir schreiben $X^{-1}(\mathcal{A}')$ für die erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F}$.

Aufgabe 3.II. Seien X, Y, X_i, $i \in \mathbb{N}$, reelle Zufallsvariablen auf dem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ und $\limsup_{n\to\infty} X_n$ sind Zufallsvariablen (mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$).

b) $\{X = Y\} \in \mathcal{A}$, $\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert }\} \in \mathcal{A}$, $\{X = \lim_{n\to\infty} X_n\} \in \mathcal{A}$.

Anmerkung. Falls nicht explizit anders angegeben, sind *reelle* Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ immer als reelle Zufallsvariablen von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ zu verstehen.

Aufgabe 3.III. Gegeben sei $\Omega = (-\pi/2, \pi/2)$, $\rho(\omega) = 1/\pi$, $X(\omega) = \sin^2(\omega)$ für $\omega \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass ρ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Zeigen Sie, dass X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ ist.

c) Sei $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte ρ aus a). Berechnen Sie die Dichte $\tilde{\rho}$ der Verteilung von X bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.

Anmerkung. Die Verteilung von X heißt *Arcussinus-Verteilung.*

Aufgabe 3.IV. Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) (i) Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenprojektion. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{B} : X_i^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n\right\}$$

eine σ-Algebra ist. Folgern Sie daraus, dass für alle $A \in \mathcal{B}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Menge

$$\mathbb{R}^{i-1} \times A \times \mathbb{R}^{n-i} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{Insgesamt } n \text{ Mengen; die Menge } A \text{ an } i\text{-ter Stelle}}$$

in $\mathcal{B}^n$ liegt.

(ii) Verwenden Sie einerseits, dass die Borelmengen $\mathcal{B}$ durch die Menge der offenen Intervalle mit reellen Randpunkten erzeugt werden und andererseits Aufgabenteil (i), um zu zeigen, dass $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}^{\otimes n}$ gilt.

b) Zeigen Sie:

(i) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f messbar bzgl. der Borelmengen $\mathcal{B}^n$.

(ii) Geben Sie eine Familie von stetigen Funktionen $\{f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$ an, deren erzeugte σ-Algebren zusammen einen Erzeuger der Borelmengen $\mathcal{B}^n$ bilden.

(iii) Schließen Sie nun, dass die Borelmengen $\mathcal{B}^n$ die kleinste σ-Algebra sind, bezüglich der alle reellwertigen stetigen Funktionen über $\mathbb{R}^n$ messbar sind,