Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

4. Aufgabenblatt zur Stochastik 1 *Auflage 3*

Abgabe bis **Freitag, 20. November 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Christian Wiesel PF 55*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 4.I (Zufällige Geraden, 8 Punkte). Die Wahl jeweils einer zufälligen Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch den Ursprung werde beschrieben durch die drei Mechanismen A, B und C:

- A: Wir wählen vollkommen zufällig einen Punkt im Einheitsquadrat $[-1,1]^2$ und ziehen eine Gerade durch diesen Punkt und den Urspung.
- B: Wir wählen vollkommen zufällig einen Punkt im Einheitskreis $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ und ziehen eine Gerade durch diesen Punkt und den Urspung.
- C: Wir wählen vollkommen zufällig einen Winkel φ aus $[0, 2\pi]$ und ziehen eine Gerade durch den Ursprung mit Winkel φ zur x-Achse.

Für welche Mechanismen stimmt die zugehörige Verteilung der zufälligen Geraden überein, für welche Mechanismen stimmen die Verteilungen nicht überein? Belegen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.II (8 Punkte). Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $F_{\mathbb{P}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_{\mathbb{P}}(c) = \mathbb{P}((-\infty, c])$, $c \in \mathbb{R}$, die zu $\mathbb{P}$ gehörige Verteilungsfunktion.

a) Zeigen Sie, dass $F_{\mathbb{P}}$ rechtsstetig ist.

b) Zeigen Sie, dass $F_{\mathbb{P}}$ das folgende asymptotische Verhalten aufweist:

$$\lim_{c \to -\infty} F_{\mathbb{P}}(c) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{c \to +\infty} F_{\mathbb{P}}(c) = 1.$$

Aufgabe 4.III (8 Punkte). Sei X eine reelle Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit stetiger Verteilungsfunktion $F_X = F$. Es bezeichne $Z : \Omega \to [0,1]$, $Z(\omega) = F \circ X(\omega) = F(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass Z eine Zufallsvariable ist.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

c) Zeigen Sie, dass die Stetigkeit der Verteilungsfunktion für das Ergebnis aus b) notwendig ist.

Aufgabe 4.IV (8 Punkte). Eine zerstreute Sekretärin verteilt n Briefe zufällig auf n bereits adressierte Briefumschläge. Zu jedem Briefumschlag passt genau einer der Briefe, und wir stellen uns vor, die Briefe seien mit den Zahlen aus $\{1, \ldots, n\}$ durchnummeriert.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an, der es Ihnen erlaubt die folgenden Fragen zu bearbeiten.
Anmerkung. Zur Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gehören insbesondere

- ☐ Eine Identifizierung des Ereignisraums $(\Omega, \mathcal{A})$ mit dem Experiment in Worten, d.h., zu beliebigem $\omega \in \Omega$ muss erklärt werden, wie es in Bezug auf das Experiment in Worten zu verstehen ist.
- ☐ Eine Begründung der Wahl von $\mathbb{P}$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet Brief Nummer 1 in dem richtigen Umschlag?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen k vorab bestimmte Briefe im jeweils richtigen Umschlag ($k \leq n$)?
Anmerkung. Dabei müssen die restlichen $n - k$ Briefe nicht notwendigerweise falsch einsortiert werden.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird keiner der Briefe richtig eingeordnet?

e) Konvergiert die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass mindestens einer der Briefe richtig einsortiert wurde, für $n \to \infty$? Wenn ja, gegen welchen Grenzwert?