Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

5. Aufgabenblatt zur Stochastik 1 *Auflage 2*

Abgabe bis **Freitag, 27. November 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Christian Wiesel PF 55*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 5.I. Das Genom einer Taufliege gliedere sich in $m = 7000$ Abschnitte. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass sich in jedem Abschnitt gleich viele, nämlich $M = 23\,000$ Basenpaare befinden. Das Genom umfasst also $N = mM$ Basenpaare. Durch hochenergetische Bestrahlung wird eine vollkommen zufällige Auswahl von $n = 1000$ Basenpaaren zerstört; die anderen $N - 1000$ Basenpaare bleiben intakt.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an, der es Ihnen erlaubt, die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der bei einer einmaligen Bestrahlung genau k_1 Basenpaare in Abschnitt 1 und genau k_2 Basenpaare in Abschnitt 2 ... und k_m Basenpaare in Abschnitt m zerstört werden.

c) Folgern Sie mithilfe von Aufgabenteil b), dass die Anzahl Z_1 zerstörter Basenpaare in Abschnitt 1 hypergeometrisch verteilt ist.

d) Zeigen Sie, dass die Verteilung $\mathbb{P} \circ Z_1^{-1}$ durch eine Poissonverteilung approximiert werden kann. Bestimmen Sie dazu einen geeigneten Parameter.

Aufgabe 5.II (Projektion der Multinomialverteilung). Sei E eine endliche Menge, ρ eine Zähldichte auf E, $n \in \mathbb{N}$, und $X = (X_a)_{a \in \mathbb{E}}$ eine Zufallvariable mit Werten in

$$\widehat{\Omega} = \left\{ \vec{k} = (k_a)_{a \in E} \in \mathbb{Z}_+^E : \sum_{a \in E} k_a = n \right\}$$

und Multinomialverteilung $\mathcal{M}_{n,\rho}$. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in E$ die Zufallsvariable X_a binomialverteilt ist zu den Parametern n und $\rho(a)$.

Aufgabe 5.III (Zufälliges Getränkekaufen). Um etwas gegen die Langeweile des Getränkeeinkaufens zu tun, überlegen Sie sich folgende Strategien S_1 und S_2, um das Ergebnis ihres Einkaufs in einem Getränkemarkt zufällig zu gestalten. Wir nehmen hierzu an, dass in eine Kiste 12 Flaschen beliebiger Sorte passen und dass es im Getränkemarkt ausschließlich von den Sorten Apfelsaft (A), Blutorangenlimonade (B) und Clementineneistee (C) noch jeweils genau eine Kiste zur Auswahl gibt. Sie starten ihren Einkauf mit ihrer eigenen, anfangs leeren Kiste.

S_1: Sie nummerieren die 36 Flaschen des Getränkemarkts und wählen vollkommen zufällig 12 Zahlen aus $\{1, \dots, 36\}$. Die entsprechenden Flaschen verstauen Sie in Ihrer Getränkekiste und kaufen diese dann.

S_2: Sie beschriften einen sechsseitigen Würfels neu. Die Felder mit den Augenzahlen 1 und 2 beschriften Sie mit A, die mit den Augenzahlen 3 und 4 mit einem B, die mit den Augenzahlen 5 und 6 mit einem C. Dann werfen Sie den Würfel 12 mal und packen jeweils eine Flasche der den jeweiligen Würfelergebnissen entsprechenden Getränkesorten in Ihre Kiste.

a) Geben Sie zu S_1 und S_2 gehörige Wahrscheinlichkeitsräume an, die es Ihnen erlauben die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden unter den Strategien S_1 und S_2 genau k Flaschen der Getränkesorte A von Ihnen eingekauft?

c) Was müsste sich in dem Experiment ändern, damit die Strategien S_1 und S_2 näher beieinanderliegende Wahrscheinlichkeiten für Ihre Getränkeauswahl liefern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.IV (Roulette). Weil Sie planen, mit Freunden Roulette zu spielen, und Sie bereits wissen, dass, strategieunabhängig, die Chancen gut stehen, dass am Ende alles der Bank gehört, haben Sie sich folgende aufwandsarme Strategie überlegt: Sie setzen beim Roulette (18 rote, 18 schwarze Felder, 1 weißes Feld für die '0') 37-mal in Folge auf die '0'.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an und bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen Z, die die Anzahl der gewonnenen Runden zählt.

b) Approximieren Sie mit Hilfe der Poisson-Verteilung zu geeignetem Parameter die Verteilung $\mathbb{P} \circ Z^{-1}$. Warum ist diese Approximation hier angebracht? Vergleichen Sie dann die exakten Wahrscheinlichkeiten mit der Approximation.