Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

6. Aufgabenblatt zur Stochastik 1

Abgabe bis **Freitag, 4. Dezember 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Christian Wiesel PF 55*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 6.I (Gamma- und negative Binomialverteilung, 8 Punkte). Seien $r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $t > 0$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0,1)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \alpha$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Z}_+$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n/n = t$. Zeigen Sie, dass

$$\Gamma_{\alpha,r}((0,t]) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{B}}_{r,p_n}(\{0,\dots,t_n\}),$$

und interpretieren Sie dieses Ergebnis mithilfe von Wartezeiten.

Aufgabe 6.II (Affine Transformation von Normalverteilungen, 8 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und bezeichne Φ die Verteilungsfunktion einer standard-normalverteilten Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Sei X eine $\mathcal{N}_{m,v}$–verteilte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $v > 0$.
   (i) Drücken Sie die Verteilungsfunktion von X mithilfe von Φ aus.
   (ii) Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, die Zufallsvariable $Z = aX + b$ normalverteilt ist. Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter.

Hausaufgabe 6.III (8 Punkte). Auf einer Ausstellung von insgesamt 12 Gemälden gibt es 10 Originale. Ein Besucher wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, einen Experten nach dessen Meinung. Dieser gibt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 eine richtige Beurteilung ab, egal ob das Bild ein Original oder eine Fälschung ist. Erklärt der Experte, dass das Bild eine Fälschung ist, gibt der Besucher das Bild zurück, wählt ein anderes und kauft dies (ohne den Experten ein zweites Mal zu fragen).

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt der Besucher ein Original, legt es auf Rat des Experten (fälschlicherweise) beiseite und wählt (und kauft) stattdessen anschließend eine Fälschung?

c) Der Besucher kauft eine Fälschung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es *nicht das erste* Bild, das er ausgesucht hat?

Hausaufgabe 6.IV (Charakterisierung der Exponentialverteilung, 8 Punkte). Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

A: Es gilt $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ und $\mathbb{P}(X > t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Außerdem ist X gedächtnislos, d.h.

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s) \quad \text{für alle } s, t \geq 0.$$

B: Die Zufallsvariable X ist exponentialverteilt.

Hinweis zur Implikation $A \Rightarrow B$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g(t) := \mathbb{P}(X > t)$, $t \geq 0$, die Funktionalgleichung $g(t + s) = g(t)g(s)$ für alle $s, t \geq 0$ erfüllt. Folgern Sie daraus, dass die Zufallsvariable X exponentialverteilt ist.