Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

7. Aufgabenblatt zur Stochastik 1

Abgabe bis **Freitag, 11. Dezember 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Christian Wiesel PF 55*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 7.I (Münzwurfparadox, 8 Punkte). Anton sagt zu Brigitte: *Du denkst Dir zwei zufällige Zahlen $X, Y \in \mathbb{Z}$ mit $X < Y$. Dann wirfst Du eine faire Münze. Wenn sie Zahl zeigt, nennst Du mir Y, andernfalls X. Ich muss dann raten, ob die Münze Zahl oder Wappen gezeigt hat. Wenn ich richtig rate, zahlst Du mir einen Euro, sonst bekommst Du einen Euro von mir.*
Sollte sich Brigitte auf das Spiel einlassen? (Immerhin steht es ihr ja frei, gemäß welcher Verteilung β sie (X, Y) wählen will, und die Chancen, das Ergebnis des Münzwurfs richtig zu erraten, stehen doch wohl bestenfalls 50:50.) Betrachten Sie dazu folgende Ratestrategie von Anton: Anton wählt eine zufällige Zahl in $\mathbb{Z}$ gemäß einer Verteilung α mit $\alpha(k) > 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Er tippt, dass die Münze *Zahl* gezeigt hat, wenn die von Brigitte genannte Zahl größer oder gleich seiner eigenen zufälligen Zahl ist, sonst auf *Wappen*.

a) Präzisieren Sie mithilfe von Satz (3.8) aus der Vorlesung das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell und berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit von Anton bei gegebenem α und β.

b) Inwiefern rechtfertigt sich die Bezeichnung *Münzwurfparadox*?

Hinweis. Sei A ein beliebiges Ereignis, das ausschließlich Antons zufällige Zahl betrifft, B ein Ereignis, das ausschließlich Brigittes zufällige Zahl betrifft und M ein Ereignis, das ausschließlich den Münzwurf betrifft. Verwenden Sie, dass solche drei Ereignisse unabhängig sind.

Aufgabe 7.II (8 Punkte). Verallgemeinern Sie das Pólyasche Urnenmodell auf den Fall, dass die Kugeln mit drei verschiedenen Farben gefärbt sind (statt nur mit zwei Farben). Bestimmen Sie die Verteilung des Histogramms S_n nach n Zügen.

Aufgabe 7.III (Business-Englisch-Kurs, 8 Punkte). Sie sind unter den 25 Studierenden, die sich für den begehrten Business-Englisch-Kurs angemeldet haben. Da es im Kurs nur 15 Plätze gibt, werden diese nach folgendem Verfahren verlost. In eine Schachtel werden 25 Zettel gelegt, davon 15 mit einem lachenden, gelben Smiley und 10 mit einem weinenden schwarzen Smiley. Jeder darf einmal blind ziehen. Diejenigen, die gelbe Smileys ziehen, sind zum Kurs zugelassen. Gezogene Zettel werden nicht zurückgelegt.
Nun wollen Sie ganz früh los am Morgen, um den *allerersten* Zettel ziehen zu können, das klappt, aber die Verlosung war am Vortag und Sie bekommen den *allerletzten* Zettel. Sie fragen sich nun, ob Ihre Chancen dadurch gemindert wurden.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (mit dem sie in Aufgabenteil b) arbeiten können) an.

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse

   A: Der erste gezogene Zettel zeigt einen gelben Smiley

   B: Der zweite gezogene Zettel zeigt einen gelben Smiley

   C: Der k-te gezogene Zettel zeigt einen gelben Smiley

   und beantworten Sie die Frage, ob Ihre Chancen dadurch gemindert wurden, dass Sie den letzten Zettel bekommen haben.

Aufgabe 7.IV (8 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$. Seien

$$A_i := \{\omega_i + \omega_{i+1} \geq 10\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n-1\},$$
$$B := \left\{ \prod_{i=1}^{n/2-1} (2\mathbb{1}_{A_{2i+1}}(\omega) - 1) > 0 \right\} \quad \text{für } \omega \in \Omega.$$

Welche der folgenden Familien von Ereignissen sind unabhängig?

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{A_1, A_3, A_5, \dots, A_{n-3}, A_{n-1}\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \{A_1, A_3, \dots, A_{n-3}, A_{n-1}, B\}.$$