Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

8. Aufgabenblatt zur Stochastik 1

Abgabe bis **Freitag, 18. Dezember 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 8.I (8 Punkte). Beim zweimaligen Wurf mit einem fairen Tetraeder-Würfel, dessen Flächen mit $1, 2, 3, 4$ beschriftet seien, bezeichne X die Summe und Y das Maximum der jeweils unten liegenden Augenzahl.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P} \circ (X, Y)^{-1}$ von X und Y.

b) Konstruieren Sie zwei Zufallsvariablen X' und Y' über einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ mit denselben Verteilungen wie X und Y (d.h. es soll gelten $\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}' \circ X'^{-1}, \mathbb{P} \circ Y^{-1} = \mathbb{P}' \circ Y'^{-1}$), für die jedoch $X' + Y'$ eine andere Verteilung besitzt als $X + Y$.

Aufgabe 8.II (8 Punkte). Sei $\Omega = (0, 1)$ versehen mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_\Omega$ und dem Lebesgue-Maß λ_Ω. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable Y_n definiert durch $Y_n(\omega) := 1$, falls $\lfloor 2^n \cdot \omega \rfloor$ ungerade und $Y_n(\omega) := 0$, falls $\lfloor 2^n \cdot \omega \rfloor$ gerade, wobei $\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ die Abrundungsfunktion bezeichnet. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\mathbb{P}(Y_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = 1/2$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

b) $Y_1, Y_2, ...$ sind unabhängige Zufallsvariablen.

Bemerkung: Auf diese Weise kann also eine unendliche Folge von Münzwürfen beschrieben werden, ohne auf das Existenzresultat aus Satz 3.26 der Vorlesung zurückzugreifen.

Aufgabe 8.III (8 Punkte). Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $\nu_1, \nu_2 > 0$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathcal{N}_{m_1,\nu_1} \star \mathcal{N}_{m_2,\nu_2} = \mathcal{N}_{m_1+m_2,\nu_1+\nu_2}.$$

Seien nun $X_1, ..., X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen und $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$, wobei $a_i \neq 0$ gelte für mindestens ein $i \in \{1, ...n\}$. Folgern Sie, dass

$$Y := \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

normalverteilt ist.

Bemerkung: Bei der Faltung von unabhängigen Normalverteilungen addieren sich also einfach die Parameter.

Aufgabe 8.IV (8 Punkte). Ein System bestehe aus vier gleichartigen voneinander unabhängigen Komponenten A, B, C, D. Es funktioniert, wenn (A und B) oder (C und D) funktionieren. Die Funktionsdauer des Gesamtsystems werde mit T, die der einzelnen Komponenten mit T_k, $k \in \{A, B, C, D\}$, bezeichnet. Die Zufallsvariablen T_A, T_B, T_C, T_D seien unabhängig exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

a) Modellieren Sie das System mit Hilfe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes.

b) Stellen Sie T mit Hilfe der Zufallsvariablen T_k, $k \in \{A, B, C, D\}$, dar.

c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbb{P}(T < t) = (1 - \exp(-2\lambda t))^2 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$