Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz WS 2015/16

9. Aufgabenblatt zur Stochastik

Bearbeitung: als Präsenzaufgaben in der Vorlesung vom 8.1.2016
Bearbeitungszeit: 1 h 15 min
Bewertung: in der üblichen Weise, als 9. Aufgabenblatt (32 Punkte)
Besprechung: in den Übungen der folgenden Woche

Bitte beachten Sie, daß grundsätzlich alle Lösungen nachvollziehbar sein müssen. Geben Sie jeweils den Wahrscheinlichkeitsraum an, definieren Sie Ereignisse und Zufallsvariablen und begründen Sie Ihre Lösungsschritte.

1. Aufgabe *(14 Punkte)*

Die n Gäste einer Party möchten wichteln. Dazu bringt jeder Gast genau ein Geschenk mit. Die Geschenke werden während der Party zufällig verteilt. Wir wollen der Einfachheit halber jedem Gast und jedem Geschenk eine Nummer zuweisen. Dabei sei Geschenk i jenes, das von Gast i mitgebracht wurde, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lesen Sie alle Fragen, bevor Sie mit Teil (a) beginnen, die Aufgabe zu bearbeiten.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an, der es Ihnen erlaubt, die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten. Erläutern Sie in Worten die Bedeutung von $\omega \in \Omega$ im Kontext der Aufgabe, und begründen Sie Ihre Wahl von $\mathbb{P}$. *(4 Punkte)*

(b) Definieren Sie Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n$, die angeben, ob Gast i beim Verteilen der Geschenke das von ihm/ihr selbst mitgebrachte Geschenk erhält. *(2 Punkte)*

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß Gast i das von ihm/ihr selbst mitgebrachte Geschenk erhält (für beliebiges i). *(2 Punkte)*

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Gäste $i_1, \dots, i_k$ jeweils das von ihnen mitgebrachte Geschenk selbst erhalten (für beliebige $i_1, \dots, i_k$ paarweise verschieden und $k \in \{1, \dots, n\}$). *(2 Punkte)*

(e) Definieren Sie eine Zufallsvariable, die angibt, wie viele Gäste das selbst mitgebrachte Geschenk erhalten. *(1 Punkt)*

(f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß kein Gast das selbst mitgebrachte Geschenk erhält. *(2 Punkte)*

(g) Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$? *(1 Punkt)*

2. Aufgabe *(8 Punkte)*

Es sei $F(x) = \exp(-\exp(-x))$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß

(i) F eine Verteilungsfunktion ist;

(ii) die zugehörige Verteilung eine Dichte(funktion) f besitzt, und geben Sie diese Dichte an. *(4 Punkte)*

(b) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X = F$ und sei $Y = \mathrm{e}^X$. Geben Sie die Verteilungsfunktion G von Y an, und geben Sie die zugehörige Dichte g an, sofern diese existiert. *(2 Punkte)*

(c) Definieren Sie

(i) den Begriff der Dichte(funktion) einer Verteilung;

(ii) den Begriff einer reellwertigen Zufallsvariablen. *(2 Punkte)*

3. Aufgabe *(10 Punkte)*

Beim Aufräumen nach den Weihnachtstagen liegen alle Christbaumkugeln zunächst durcheinander in einer großen Kiste. Die Kugeln unterscheiden sich nur in ihrer Farbe. Es gibt $N_0 \in \mathbb{N}$ goldene und $N_1 \in \mathbb{N}$ rote Kugeln. Damit die Kugeln nicht kaputt gehen, wollen Sie die Kugeln in die Originalkartons zurücklegen. Ein Originalkarton faßt n Kugeln, $1 \leq n \leq N_0 + N_1$. Sie greifen, ohne hinzuschauen, zufällig n Kugeln.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an, der es Ihnen erlaubt, die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten. Erläutern Sie in Worten die Bedeutung von $\omega \in \Omega$ im Kontext der Aufgabe, und begründen Sie Ihre Wahl von $\mathbb{P}$. *(2 Punkte)*

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Sie genau k rote Kugeln gegriffen haben? *(3 Punkte)*

(c) Benennen Sie die Verteilung der Anzahl roter Kugeln mit Angabe der Parameter. *(2 Punkte)*

(d) Nehmen wir nun an, daß wir eine sehr große Zahl von Kugeln beider Farben haben: Wir nehmen an, daß

$$N_0 \to \infty\,, \qquad N_1 \to \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{N_1}{N_0 + N_1} \to p\,.$$

Zeigen Sie durch direkte Rechnung (d.h., ohne auf den entsprechenden Satz aus der Vorlesung zu verweisen), daß die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil (b) gegen eine (uns bekannte) Verteilung konvergiert. Benennen Sie diese Verteilung mit Angabe der Parameter. Müssen Sie Annahmen an p machen? Falls ja, welche? *(3 Punkte)*