Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

1. Präsenzübungsblatt zur Stochastik 1

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen zwischen dem 26. und 29. Oktober

Präsenzübung 1.I. Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2$, zwei Ereignisräume. Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ der sogenannte ω_1-*Schnitt* $A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$ von A in $\mathcal{A}_2$ liegt.

Präsenzübung 1.II. Es sei $\mathcal{E} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ die Menge aller offenen Intervalle. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Präsenzübung 1.III. Es bezeichne $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}^n$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ stimmt überein mit

$$\mathcal{B}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}}_{n-\text{mal}},$$

dem n-fachen Produkt der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass für höchstens abzählbare $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\mathcal{B}^n_\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$, wobei $\mathcal{B}^n_\Omega = \{\Omega \cap B : B \in \mathcal{B}^n\}$ die sogenannte Spur-σ-Algebra ist.

c) Sei $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ eine Familie abzählbarer Mengen und $\Omega = E_1 \times E_2 \times \ldots$ Es bezeichne $X_i : \Omega \to E_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate und es sei

$$\mathcal{G} = \Big\{\{X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k\} : k \in \mathbb{N}, x_i \in E_i, i \in \{1, \ldots, k\}\Big\} \cup \{\emptyset\}.$$

Zeigen Sie, dass das System $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, d.h., falls $A, B \in \mathcal{G}$, dann gilt, dass $A \cap B \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie zudem, dass $\mathcal{G}$ ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{P}(E_1) \otimes \mathcal{P}(E_2) \otimes \ldots$ ist.