Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

10. Präsenzübungsblatt zur Stochastik 1

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen am 12. und 14. Januar

Präsenzübung 10.I.

a) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

b) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}_+$. Zeigen Sie mit diskreter Approximation, dass:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq s) ds.$$

Bemerkung: Beide Seiten können $+\infty$ sein.

Präsenzübung 10.II. Es sei X eine reelle Zufallsvariable. Überprüfen Sie in den Fällen

a) X ist $\mathcal{U}_{[0,1]}$ verteilt,

b) X hat die Cauchy-Verteilungsdichte $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

c) $X = e^Y$ für eine $\mathcal{N}_{0,1}$-verteilte Zufallsvariable Y,

ob der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $V(X)$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

Präsenzübung 10.III. Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilung Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ wird *Median* von X genannt, wenn $\mathbb{P}(X \geq \mu) \geq \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X \leq \mu) \geq \frac{1}{2}$.

a) Beweisen Sie die Existenz eines Medians μ.

b) Ist μ im Allgemeinen eindeutig bestimmt?

c) Sei X die Augenzahl beim Wurf eines fairen, sechsseitigen Würfels. Bestimmen Sie den Erwartungswert und einen Median. Ist der Median eindeutig bestimmt?

d) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilungsdichte durch $\rho(x) := \frac{1}{x^2} \cdot 1_{[1,\infty)}(x)$ gegeben ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert und einen Median. Ist der Median eindeutig bestimmt?