Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

2. Präsenzübungsblatt zur Stochastik 1

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen zwischen dem 30. Oktober und 3. November

Präsenzübung 2.I. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(A \cup B \cup C\big) = \mathbb{P}\big(A\big) + \mathbb{P}\big(B\big) + \mathbb{P}\big(C\big) - \mathbb{P}\big(A \cap B\big) - \big(A \cap C\big) - \mathbb{P}\big(B \cap C\big) \\ + \mathbb{P}\big(A \cap B \cap C\big).\end{aligned}$$

Präsenzübung 2.II. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Geben Sie ein Dynkin-System $\mathcal{D}_0$ über Ω an, so dass $\mathcal{D}_0$ keine σ-Algebra ist, aber $\sigma(\mathcal{D}_0) = \mathcal{P}(\Omega)$.

b) Geben Sie zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ an, die über $\mathcal{D}_0$ übereinstimmen, nicht aber über $\mathcal{P}(\Omega)$.

Hinweis:

(i) Nutzen Sie für geeignete $\alpha_i, \beta_i \geq 0,\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$, den Ansatz

$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \delta_i(A) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_2(A) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i \delta_i(A) \quad \text{für alle } A \subset \Omega.$$

(ii) Nutzen Sie Aufgabe 2.III vom aktuellen Übungszettel, um zu zeigen, dass $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sind.

Präsenzübung 2.III. Seien $k, n \in \mathbb{N}$, k ein Teiler von n, und Ω eine n-elementige Menge. Zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathcal{A}} := \big\{A \in \mathcal{P}(\Omega) : k \text{ ist Teiler von } |A|\big\}$$

ein Dynkin-System ist. Ist $\hat{\mathcal{A}}$ sogar eine σ-Algebra?

Präsenzübung 2.IV. Es sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Bestimmen Sie $\gamma > 0$ so, dass durch

$$\nu(A) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \delta_i(A) \quad \text{für alle } A \subset \Omega$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird. Zeigen Sie außerdem, dass dann gilt:

$$\nu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{für alle } A \subset \Omega.$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß ν heißt *Gleichverteilung* auf Ω.