Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

5. Präsenzübungsblatt zur Stochastik 1

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen am 24. und 26. November

Präsenzübung 5.I (zum Rutherford-Experiment). Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr ausgerüstet treten wir einem Stück radioaktivem Präparat gegenüber. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass pro Sekunde 200 000 Atome zerfallen und dass vollkommen zufällig jeder einzelne Zerfall von einem Geiger-Zähler mit Wahrscheinlichkeit $0.2 \cdot 10^{-5}$ registriert und signalisiert wird. Wir messen genau eine Sekunde lang.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und eine Zufallsvariable S, die durch den Geiger-Zähler gemessenen Teilchen zählt.

b) Bestimmen Sie K derart, dass die (approximative) Wahrscheinlichkeit mehr als K Teilchenzerfälle zu registrieren, unter 1% sinkt. Begründen Sie die von Ihnen genutzte Approximation.

Präsenzübung 5.II (Lotto 6 aus 49). Es ist eine beliebte Strategie, die sechs Glückszahlen aus Tages- und Monatszahlen der Geburtstage dreier nahestehender Menschen zu wählen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Lottozahlen vom Typ der obenen beschriebenen Glückszahlen sind. Mögliche Glückszahlen, bestehend aus drei Geburtsdaten sind die Lottozahlkombinationen $\{12, 20, 31, 16, 7, 3\}$ oder $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nicht möglich als Glückszahl auf dem Lottoschein sind folgende Kombinationen von drei Geburtsdaten $\{1.2., \ 12.2., \ 16.3.\}$ oder $\{12.3., \ 2.2., \ 27.11.\}$. Wir nehmen vereinfachend an, dass jeder Monat 31 Tage habe.

Präsenzübung 5.III (Einfache symmetrische Irrfahrt). Am Abend eines Wahltags werden die Stimmen für zwei konkurrierende Kandidaten A und B ausgezählt. Beide Kandidaten seien gleich beliebt, d.h. auf jedem Stimmzettel sei A oder B mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$ angekreuzt; insgesamt gebe es $2N$ Stimmen. Sei $X_i = 1$ oder -1 je nachdem ob die i-te Stimme für A oder B ist. Die Summe $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ gibt dann an, wie weit A nach Auszählung von j Stimmen vor B führt (bzw. hinter B zurücklegt). Die Folge $(S_j)_{j\geq 1}$ heißt einfach symmetrische Irrfahrt. Sei $n \in \{1, \ldots, N\}$ und $u_n := 2^{-2n}\binom{2n}{n}$. Präzisieren Sie das Modell, d.h., geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und definieren Sie alle Zufallsvariablen formal. Zeigen Sie dann

a) Für das Ereignis $G_n = \{S_{2n} = 0, S_{2k} \neq 0 \text{ für } 1 \leq k < n\}$ gilt

$$\mathbb{P}\big(G_n\big) = 2^{-2n+1}\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] = u_{n-1} - u_n.$$

   Veranschaulichen Sie sich dazu die Folge $(S_j)_{j\leq 2n}$ durch den Polygonzug durch die Punkte (j, S_j), und stellen Sie eine Bijektion her zwischen den Polygonzügen von $(1,1)$ nach $(2n-1,1)$, welche die horizontale Achse treffen, und den Polygonzügen von $(1,-1)$ nach $(2n-1,1)$.

b) Für das Ereignis $G_{>n} = \{S_{2k} \neq 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$ gilt $\mathbb{P}(G_{>n}) = u_n$.