Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

7. Präsenzübungsblatt zur Stochastik 1

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen am 8. und 11. Dezember

Präsenzübung 7.I. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$ unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass gilt:

a) A^c und B sind unabhängig,

b) $A \cap B$ und C sind unabhängig,

c) $A \cup B$ und C sind unabhängig.

Präsenzübung 7.II.

a) Seien $n \geq 2$, $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$. Betrachten Sie die Ereignisse

$$A_j = \{\omega \in \Omega : \omega_j = 1\}, j = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad B = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i \equiv 1 \bmod 2\right\}.$$

Welche der folgenden drei Familien sind unabhängig?

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B\}, \qquad \mathcal{F}_2 = \{A_1, \ldots, A_n\}, \qquad \mathcal{F}_3 = \{A_2, \ldots, A_n, B\}.$$

b) Ein roter und ein blauer Würfel werden geworfen und die Augenzahlen verglichen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse

A: Die Augensumme ist mindestens 10

B: Die Augensumme ist ungerade

C: Die Augenzahl des roten Würfels ist durch 3 teilbar

i) Geben Sie ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an, um die weiteren Aufgaben bearbeiten zu können, und definieren Sie $A, B, C \in \mathcal{A}$.

ii) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

und dass A, B und C unter $\mathbb{P}$ nicht unabhängig sind.

Präsenzaufgabe 7.III. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten unter $\mathbb{P}$ weder 0 noch 1 sind.

a) Falls $A \subseteq B$, können A und B unabhängig sein?

b) Falls A und B unabhängig sind, können A und $A \cup B$ unabhängig sein?

c) Angenommen $A \cap B \cap C = \emptyset$, können A, B, C paarweise unabhängig sein?

d) Seien A, B, C unabhängig. Zeigen Sie, dass $A \Delta B$ unabhängig ist von C, wobei

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$