Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

11. Präsenzübung zur Stochastik A

Präsenzübung 11.I: (Warten auf den Aufzug)
$(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum. Sie haben ein Tutorium im 4.OG. und warten vor dem Aufzug. Wir wollen annehmen, dass die Wartezeit $X\Omega \to \mathbb{R}_+$ *exponential*-verteilt ist zum Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$\mathbb{P}\big[X \in [a,b]\big] = \int_a^b \lambda e^{-\lambda s}\, ds, \quad 0 \le a \le b.$$

1. Sei nun $\lambda = 0.1$. Bestimmen Sie die W'keit länger als 15 Sekunden zu Warten.
2. Sie warten schon ganze N Sekunden, $N \in \mathbb{N}$, wie groß ist nun die W'keit nochmal mehr als 15 Sekunden zu warten?
3. Angenommen Sie haben die Möglichkeit vor 2 Aufzügen gleichzeitig zu warten. Zeigen Sie, dass die erste Ankunft einer der beiden Fahrstühle wieder exponentialverteilt ist; zu welchem Parameter?

Präsenzübung 11.II:
Ein Stab der Länge 1 wird in zwei Teile gebrochen sodass der rechte Teil auf dem Einheitsintervall uniform verteilt ist. Danach wird ebenso zufällig der längere Teil in zwei Stücke gebrochen. Wie groß ist die W'keit, dass sich aus den 3 Stücken nun ein Dreieck bilden lässt?

Präsenzübung 11.III:

(a) Bestimmen Sie Konstanten c_1, c_2 derart, dass die folgenden Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1(x(1-x))^{-\frac{1}{2}} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \frac{c_2}{\alpha^2 + (x-\beta)^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Dichten sind. Dabei seien $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie sowohl diese Dichten als auch die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

(b) Zeigen Sie, dass $G(x) = \exp(-\exp(-x)), x \in \mathbb{R}$, eine Verteilungsfunktion ist. Bestimmen Sie die zugehörige Dichte und skizzieren Sie Verteilungsfunktion und Dichte.

Hinweise:

$$\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, t \in (-1,1) \quad \frac{d}{dt}\arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}.$$