Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

13. Präsenzübung zur Stochastik A

Präsenzübung 13.I:
$(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum. Sei die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y gegeben durch die Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y} \mathbb{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Randdichte von Y,

(b) Zeigen Sie, dass $f_X(x|Y=y)$ gegeben ist durch $\frac{1}{y}$ wann immer $0 < x < y$.

(c) Nutzen Sie Ihr Resultat aus Aufgabenteil (b) um den Erwartungswert von X zu bestimmen.

Präsenzübung 13.II:
$(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum. Sei die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{-x-y} & , \text{ falls } x, y \geq 0, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig?

Präsenzübung 13.III: (Buffons Nadelproblem)
Wir unterteilen die Ebene $\mathbb{R}^2$ durch alle Linien der Form $x = m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$(d.h. senkrechte Geraden im Koordinatensystem, die die x-Achse in den ganzen Zahlen treffen). Eine Nadel der Länge 1 wird nun vollkommen zufällig irgendwo auf die Ebene geworfen. Es bezeichne Θ den Winkel, modulo π, den die Nadel mit der y-Achse aufspannt und Z der Abstand vom Mittelpunkt der Nadel zur nächsten senkrechten Linie links vom Mittelpunkt der Nadel.

(a) Beschreiben Sie warum es eine sinnvolle Annahme ist, dass Z auf $[0, 1)$ und Θ auf $[0, \pi)$ uniform verteilt sind.

(b) Zeigen Sie, dass unter den Annahmen in (a), die gemeinsame Dichte von Z und Θ gegeben ist durch

$$f(z, \theta) = \frac{1}{\pi} \quad \forall\, (z, \theta) \in [0, 1) \times [0, \pi).$$

(c) Zeigen Sie, dass die Nadel eine Linie schneidet genau dann wenn

$$(Z, \Theta) \in \left\{ (z, \theta) \;:\; z \leq \frac{1}{2}\sin(\theta) \quad \text{oder} \quad 1 - z \leq \frac{1}{2}\sin(\theta) \right\}.$$

(d) Zeigen Sie, dass die W'keit, dass die Nadel eine Linie schneidet gegeben ist durch $2/\pi$.

(e) Erläutern Sie wie man das Resultat aus (d) benutzen kann um π numerisch zu approximieren.
(Denken Sie an das schwache Gesetz der großen Zahlen.)