Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

6. Präsenzübung zur Stochastik A

Präsenzaufgabe 6.I:
Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie:

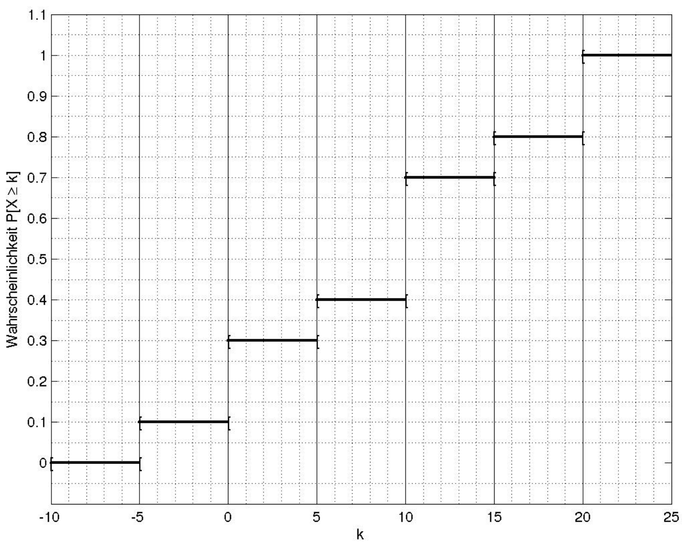
1. $\mathbb{E}\big[X\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big[X \geq n\big]$

2. $\mathbb{E}\big[X^2\big] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\mathbb{P}\big[X \geq n\big].$

   Hinweis: Beginnen Sie mit der rechten Seite und stellen Sie $\mathbb{P}[X \geq n]$ als Summe dar.

Präsenzübung 6.II:

Figure 1: *Die kumulative Verteilungsfunktion der Verteilung der Zufallsvariablen X unter $\mathbb{P}$*



Sei $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ diejenige Zufallsvariable, deren kumulative Verteilungsfunktion durch den Graphen oben gegeben ist.

(a) Geben Sie $\mathbb{P}_X[k]$ für alle $k \in X\big(\Omega\big)$ an.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Präsenzübung 6.III: (St. Petersburg Paradoxon[1])

Stellen Sie sich folgendes Glückspiel vor. Es wird eine Münze geworfen, zeigt diese *Zahl*, so gewinnt man 1€; zeigt sie dagegen *Wappen*, wird sie erneut geworfen. Für jede Runde, die es dauert bis das *erste Mal* Kopf fällt, wird der ausgezahlte Gewinn mit 2 multipliziert. Ist nach n-maligen Würfeln ($n \in \mathbb{N}$ beliebig) noch keine *Zahl* gefallen, bricht das Spiel ab und der Spieler erhält 2^n €.

(Die Münzwurfabfolge *Wappen-Wappen-Wappen-Kopf* würde z.B. zu einer Auszahlung von 8€ führen.)

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (bzw. vielmehr eine geeignete Familie von W'Räumen) inklusive (jeweils) derjenigen Zufallsvariablen an, die die Auszahlung an den Spieler angibt.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der in a) definierten Zufallsvariablen.

(c) Was passiert nun, wenn man nicht mehr nur maximal n-mal wirft, sondern beliebig oft. Betrachten Sie den Erwartungswert im Limes $n \to \infty$, was ist zu beobachten?
(Was wäre Ihnen eine solches Glückspiel wert, d.h. welchen Betrag würden Sie zahlen um es spielen zu dürfen?)

---

[1] Anmerkung:
Das St.Petersburg-Paradoxon ist ein klassisches Beispiel im Rahmen der Erwartungsnutzen-Theorie (siehe z.B. Allgemeine Gleichgewichtstheorie). Im klassischen Fall zahlt die Lotterie <u>nicht</u> 2^n Geldeinheiten aus, sondern sie zahlt $u^{-1}(2^n)$ (u <u>unbeschränkte</u>, str. steigende, str. konkave Nutzenfunktion) aus. Der Effekt ist, dass der Erwartungsnutzen ∞ ist. Dann aber würde ein Agent für die kleinste Chance auf dieses Spiel jeden Preis bezahlen. Weil das aber nicht besonders sinnvoll erscheint, nimmt man an, Nutzenfunktionen seien beschränkt.