Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

7. Präsenzübung zur Stochastik A

Präsenzübung 7.I:
Wir würfeln 2mal mit einem fairen Würfel. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und entscheiden Sie ob X und Y unabhängig sind in den folgenden Fällen:

(a) X sei die größte geworfene Augenzahl, Y die Summe der Augenzahlen.

(b) X sei das Ergebnis des ersten Wurfs, Y der größere der Werte

Präsenzaufgabe 7.II:(Bluttest)
Betrachten Sie folgendes Verfahren für einen Bluttest. Die zu testenden nk Personen, $n, k \in \mathbb{N}$, werden in Gruppen von k Personen eingeteilt. Die Blutproben jeder einzelnen Gruppe werden zunächst gemischt, so dass nur ein Test pro Gruppe erfolgt. Ist das Resultat negativ, so werden die Personen der betroffenen Gruppe einzeln getestet, also weitere k Tests durchgeführt. Wir nehmen an, dass der Test für eine Einzelperson mit Wahrscheinlichkeit p positiv ausfällt und dass die Testergebnisse verschiedener Personen unabhängig voneinander sind.

(a) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der insgesamt durchzuführenden Tests.

($\star$) Verwenden Sie die Abschätzung $(1-p)^k \geq 1 - kp$ um die ideale Gruppengröße zu bestimmen.

Präsenzübung 7.III:
Finden Sie ein Beispiel für unabhängige Zufallsvariablen X und Y auf einem W'Raum $(\Omega, \mathbb{P})$ sodass die Erwartungswerte von X, Y und X/Y existieren und es gilt:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \neq \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}.$$

Präsenzaufgabe 7.IV:

Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein abzählbarer Wahrscheinlichkeitsraum. Die Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \mathcal{X}_i, \ i = 1, \dots, 5$ seien unabhängig $(\mathcal{X}_i, \ i = 1, \dots 5)$. Zeigen Sie, dass für beliebige Funktionen

$$\begin{aligned} &g_i : \mathcal{X}_i \to B_{g_i}, \qquad i = 1, 2, \\ &f_1 : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to B_{f_1}; \qquad f_2 : \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_5 \to B_{f_2} \text{ gilt:} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $g_i(X_i), i = 1, 2$ unabhängig sind.

(b) Die beiden Zufallsvariablen $f_1(X_1, X_2)$ und $f_2(X_3, X_4, X_5)$ sind unabhängig.

(c) Geben Sie ein Beispiel für Funktionen h_1 und h_2 und unabhängige Zufallsvariablen $X_i, i = 1, 2, 3$, für die gilt: $h_1(X_1, X_2)$ und $h_2(X_2, X_3)$ sind <u>nicht unabhängig</u>.