

1. Aufgabenblatt zur Stochastik A Auflage 2

Abgabe bis **Freitag, 29.10.2010, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 1.I (*Bonferroni-Ungleichung* und das *Ein- und Ausschlussprinzip*)

Es sei (Ω, \mathbb{P}) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. In der Vorlesung wurden bewiesen, dass für beliebige $A, B, C \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B] \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cup B \cup C] &= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] \\ &\quad - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C] \\ &\quad + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]. \end{aligned}$$

Nun seien für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $\{A_k\}_{k=1, \dots, n}$ eine Familie von Ereignissen, d.h. $A_k \subset \Omega, k \leq n$.

(a) Zeigen Sie nun die *Bonferroni-Ungleichung*:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^n A_k\right] \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_k] - \sum_{i,j \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j].$$

(b) Zeigen Sie das *Ein- und Ausschlussprinzip* (oder *Siebsatz von Poincaré und Sylvester*),

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \mathbb{P}[A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_i}].$$

Hausaufgabe 1.II

Ein idealer 6-seitiger Würfel wird 4 Mal geworfen

- (a) Geben Sie einen geeigneten W -Raum an.
- (b) Wie groß ist die W -keit, dass...
 - (i) ...das Maximum der Augenzahlen genau 4 ist?
 - (ii) ...das Minimum der Augenzahlen mindestens 5 ist?

Hausaufgabe 1.III (Handynummern Raten)

Sie haben die Handynummer eines Bekannten vergessen und probieren auf gut Glück einfach irgendeine 7stellige Nummer (vollkommen zufällig generiert).

- (a) Geben Sie einen geeigneten W -Raum an
- (b) Mit welcher W -keit kommt keine 0 in der Zahl vor?
- (c) Wie groß ist die W -keit für das Auftreten (an beliebiger Stelle) der Zahlenfolge...
 - (i) ...1234...
 - (ii) ...2222...
 - (iii) ...1212...
- (d) Wie ändert sich der W -Raum aus (a), wenn wir Nummern, die **keine** 0 enthalten, für **nicht plausibel** halten?

Hausaufgabe 1.IV

In einer Urne befinden sich **5 rote** und **5 blaue** Kugeln.

- (a) Es werden 5 Kugeln nacheinander, mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge gezogen.
 - (i) Geben Sie einen geeigneten W -Raum an.
 - (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau 2 blaue Kugeln?
(Nutzen Sie den in (i) definierten W -Raum und notieren Sie, welche Elementarereignisse die Forderung erfüllen)
- (b) Zufälliges gleichzeitiges Herausgreifen von 5 Kugeln.
 - (i) Geben Sie einen geeigneten W -Raum an.
 - (ii) Mit welcher W -keit erhält man genau 2 blaue Kugeln?
(Nutzen Sie den in (i) definierten W -Raum und notieren Sie, welche Elementarereignisse die Forderung erfüllen)