Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

11. Aufgabenblatt zur Stochastik A Auflage 2

Abgabe bis **Freitag, 21.1.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 11.I:
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum und die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei *dreidimensional standard-normalverteilt*, d.h. $X = (X_1, X_2, X_3)$ habe die Dichte:

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} \right), \quad -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty.$$

(a) Berechnen Sie die Randdichte von X_1,

(b) Geben Sie die Randverteilung von (X_1, X_2) an,

(c) Sind die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 unabhängig oder zumindest paarweise unabhängig?

Hausaufgabe 11.II:
$(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum. Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$X_i \sim \mathcal{N}_{\mu_i, \sigma_i^2}, 1 \le i \le n.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2 \right).$$

Hausaufgabe 11.III:
$(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum,

(a) X, Y seien unabhängig uniform verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $[0,1]$. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von (X, Y).

(b) Für ein $c \in [-1,1]$ sei die Verteilung der Zufallsvariablen (X, Y) gegeben durch die Dichte

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 + c(1-2x)(1-2y) & , \text{ falls } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

Hausaufgabe 11.IV:
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein W'Raum und $X_1, \ldots, X_n$ darauf unabhängige und identisch exponentialverteilte ZV'en zum Parameter λ.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1,

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $\sum_{i=1}^{n} X_i$, interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Zeigen Sie, dass das Minimum $\min(X_1, \ldots, X_n)$ der Zufallsvariablen wieder *exponentialverteilt* ist, zu welchem Parameter?