Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

12. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis **Freitag, 28.1.2011, 12:00 Uhr**
Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 12.I:
W'Raum $(\Omega, \mathbb{P})$. Gegeben nichtnegative, reellertige Zufallsvariablen X, Y, deren gemeinsame Verteilung gegeben ist durch die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = x \exp\big(\ -x(y+1)\ \big) \cdot \mathbb{1}_{\{[0,\infty)\times[0,\infty)\}}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die marginalen Verteilungsfunktionen von X und Y.

(b) Zeigen Sie, dass $X \cdot Y$ exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter 1 ist.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}\big[\ X \ \big|\ Y = y\ \big]$.

Hausaufgabe 12.II:
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ W'Raum.

(a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ abzählbar, $\mathbb{E}\big[\ |X|\ \big] < \infty$ und $\mathbb{E}\big[\ |X|^2\ \big] < \infty$, zeigen Sie, dass gilt:
(Notieren Sie auf ihrer Abgabe in sorgfältiger Art und Weise, welche Voraussetzung wo eingeht.)

(i) $\mathbb{E}\big[\ X\ \big] = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\ X \geq i\ \big]$

(ii) $\mathbb{P}\big[\ |X - \mathbb{E}[X]| \geq c\ \big] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{c^2}$ für alle $c > 0$ *(Tschebyschow-Ungleichung)*

(b) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine Zufallsvariable deren Verteilung gegeben ist durch die Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\mathbb{E}\big[\ |X|\ \big] < \infty$ und $\mathbb{E}\big[\ |X|^2\ \big] < \infty$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{E}\big[\ X\ \big] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}\big[X > t\big]\ dt.$

(ii) $\mathbb{P}\big[\ |X - \mathbb{E}[X]| \geq c\ \big] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{c^2}$ für beliebige $c > 0$.

Hausaufgabe 12.III:
Es sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Überprüfen Sie in den folgenden Fällen (a)-(c) ob Erwartungswert und ob Varianz der Zufallsvariablen X existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.
Die Zufallsvariable...

(a) ...ist uniform verteilt auf dem Intervall $[a, b]$ wobei $a < b \in \mathbb{R}$.

(b) ...hat die Verteilungsdichte [1]

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}.$$

(c) ...hat die Form $X = \exp(Y)$ wobei $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Hausaufgabe 12.IV:
Betrachten Sie folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

$$R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| + 2 \cdot |y| \leq 2\big\}.$$

Sei nun $\mathbb{P}$ die uniforme Verteilung auf R und

$$(X_1, X_2)(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \omega_2)$$

die *kanonischen Koordinatenprojektionen.*

(a) Geben Sie die Dichte der Verteilung von (X_1, X_2) an,

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X = (X_1, X_2)$ in $\mathbb{R}^2_+$ liegt.

(c) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X_1 und X_2.

(d) Berechnen Sie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_2 = \frac{1}{2}$ an.

(e) Sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig?

[1] HINWEIS:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{u^2 + 1}\, du = \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$