Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

4. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis **Freitag, 19.11.2010, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 4.I:
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher, diskreter W'Raum gegeben und die Menge der Ergebnisse sei $\Omega = \{a_1, \dots, a_k\}$. Die Wahrscheinlichkeit sei definiert durch $\mathbb{P}[a_i] = p_i$, $i = 1, \dots k$ ($p_i \in [0,1]\ \forall\ i = 1, \dots, k$). Betrachte das n-fache Produktexperiment $(\Omega^n, \mathbb{P}^n)$ von $(\Omega, \mathbb{P})$. Definiere auf $(\Omega^n, \mathbb{P}^n)$ die Zufallsvariable $S = (S^1, \dots, S^n) : \Omega^n \to \mathbb{N}^k$ durch

$$S(\omega) := \big(S^1(\omega), \dots, S^k(\omega)\big) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{a_j\}}(\omega_i)\right)_{j=1}^k .$$

1. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable S^1 binomialverteilt ist zu den Parametern n und p_1.

2. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable S *multinominalverteilt* ist zu den Parametern n und $p_1, \dots p_k$, d.h. für alle $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $\sum_{i=1}^k n_i = n$

$$\mathbb{P}^n\big[S = (n_1, \dots, n_k)\big] = \binom{n}{n_1, \dots, n_k} \prod_{i=1}^k p_i^{n_i},$$

   wobei der Multinomialkoeffizient $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ definiert ist als

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}.$$

3. Berechnen Sie den Erwartungswert einer multinomialverteilten Zufallsvariablen.

Hausaufgabe 4.II:(Ein Würfelspiel)
Einem Passanten wird auf der Straße folgendes Spiel vorgeschlagen: Es werden zwei 4seitige Würfel geworfen. Sind die Augenzahlen gleich, so erhält der Passant das 5fache seines Einsatzes. Ist die Differenz der Augenzahlen der Würfel gleich 1,2 oder 3, so verliert der Passant das jeweilige Vielfache seines Einsates. Sei der Einsatz durch $e \in \mathbb{R}_+$ gegeben.
(Der Passant gibt seinen Einsatz zu Beginn des Spiels an, muss ihn aber <u>nicht ex ante bezahlen</u>, alle Auszahlungen finden also nach dem Spiel statt)

(a) Geben Sie einen geeigneten W'Raum an.

(b) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die Auszahlung an den Passanten (mglw. negativ im Falle, dass der Passant verliert). Geben Sie die Mengen $X^{-1}(k)$ für $k \in X(\Omega)$ explizit an.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X und klären Sie die Frage ob das Spiel vor- oder nachteilhaft ist.

Hausaufgabe 4.III:
In der Umgebung von 10 Kernkraftwerken werden je 100 Personen (rein zufällig) ausgewählt und auf eine bestimmte Krankheit hin überprüft, welche im Durchschnitt in 1% aller Fälle auftritt. Es wird vereinbart, dass ein Kraftwerk als 'auffällig' bezeichnet wird, falls unter den jeweils 100 Personen mindestens 3 dieses Krankheitsbild zeigen.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Kraftwerk auffällig wird, obwohl die Erkrankungswahrscheinlichkeit in der Umgebung aller 10 Kraftwerke gleich dem Durchschnittswert von 1% ist?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines auffällig wird, obwohl die Erkrankungswahrscheinlichkeit in der Umgebung aller Kraftwerke 2% beträgt?

Hausaufgabe 4.IV:
Betrachten Sie nochmal das Problem der zerstreuten Sekretärin aus Hausaufgabe 2.III. Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Briefen, die in den richtigen (zugehörigen) Umschlag einsortiert werden.
Zu einer vollständigen Lösung gehört die Angabe eines geeigneten W'Raumes und die Definition derjenigen Zufallsvariable über die wir eine Aussage machen wollen.