Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

5. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis **Freitag, 26.11.2010, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 5.I:
Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und darauf die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, deren Verteilung gegeben ist durch

$$\mathbb{P}\big[X = k\big] = \mathbb{P}\big[X = -k\big] = \mathbb{P}_X\big[k\big] = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{k^2} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

hier ist Z eine geeignete Normierungskonstante.

(a) Bestimmen Sie Z.

(b) Existiert der Erwartungswert von X? Berechen Sie den Erwartungswert, sofern er existiert.

(c) Was können Sie über die Varianz von X aussagen?

Hausaufgabe 5.II:
Eine Urne enthält eine weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Sei $X_k = 0$, wenn die k-te Kugel weiß ist, und sonst $X_k = 1$.

(a) Geben Sie einen geeigneten W'Raum an und definieren Sie X_k, $1 \le k \le 3$, auf diesem.

(b) Geben Sie die Randverteilung (Marginalverteilung) von X_1, die Randverteilung von X_2 und die Randverteilung von X_3 sowie die *gemeinsame Verteilung* von X_1, X_2, X_3 an.

(c) Bestimmen Sie die zu (X_2, X_3) gehörige Randverteilung.

(d) Berechnen Sie die Verteilung von $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Hausaufgabe 5.III: (Poisson-Verteilung:)
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein W'Raum und $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine *Poisson*-verteilte Zufallsvariable zu Parameter $\lambda > 0$ darauf, d.h.

$$\mathbb{P}\big[X = k\big] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall\, k \geq 0.$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\big\{X \neq 0\big\}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Hausaufgabe 5.IV: (Markov-Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein abzählbarer Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine nichtnegative, reellwertige Zufallsvariable darauf. Sei außerdem eine monton wachsende Funktion $h : [0, \infty) \to (0, \infty)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die *Markow*[1]-Ungleichung gilt; diese ist gegeben durch:

$$\mathbb{P}\big[X \geq a\big] \leq \frac{\mathbb{E}\big[\ h(X)\ \big]}{h(a)} \quad \text{für } a \in [0, \infty) \text{ beliebig.}$$

(b) Beweisen Sie die *Tschebyschow*[2]-Ungleichung mit Hilfe der Markow-Ungleichung. Nehmen Sie hierzu an, dass der Erwartungswert und die Varianz von X existieren.

[1] *Andrei Andrejewitsch Markov* (1856-1922), russischer Mathematiker (Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis) Student von *Pafnuti Tschebyschow*
[2] *Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow* (1821-1894), russischer Mathematiker