Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

6. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis **Freitag, 3.12.2010, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$, d.h. den **Ereignisraum** Ω und das **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbb{P}$, und die benötigten **Zufallsvariablen** an.

Hausaufgabe 6.I:(Parkplatzsuche)
Sie sind mit dem Auto unterwegs zum Kino. Das Kino liegt an einer unbegrenzt langen, geraden Straße, die auf einer Seite auf ganzer Länge mit Parkplätzen versehen ist. Das Kino ist das einzige seiner Art an dieser Straße und der Eingang liegt zentral vor einem ganz bestimmten Parkplatz. Sie wohnen ziemlich weit weg und auf Ihrer Fahrt zum Kino passieren Sie alle Parkplätze, die auf *ihrer* Seite des Kinos liegen.
Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Parkplatzes belegt zu sein, ist unabhängig und identisch mit $p \in (0, 1)$ gegeben. Ihre Parkplatzsuche verläuft folgendermaßen: Stehen Sie unmittelbar vor einem Parkplatz, dann können Sie erkennen ob er belegt ist oder nicht und, insofern er noch frei ist, ihn nehmen oder nicht. Kein anderer Parkplatz ist beobachtbar, der Rückwärtsgang defekt. In unserer *eine-Straße-ein-Kino-eine-Richtung*-Welt regnet es auch noch permanent. Ziel ist es also, möglichst nah am Kino zu parken, d.h. die Distanz beim Parken zum einen *optimalen* Parkplatz direkt vor dem Eingang zu minimieren.

(a) Angenommen, Sie waren unaufmerksam und der *erste* Parkplatz, den Sie beobachten, ist derjenige unmittelbar vor dem Kino. Wie groß ist Ihre erwartete Distanz zum Kino?

(b) Angenommen $p = 0.9$, von welchem Parkplatz an, nehmen Sie den Parkplatz und hoffen nicht mehr einen besseren Parkplatz näher am Kino zu finden?

Hausaufgabe 6.II:
Bei einem Tanzfest von N Ehepaaren werden beim ersten Tanz die Partner einander zugelost. Wer mit seiner Gattin getanzt hat, verlässt mit dieser das Parkett, und beim nächsten Tanz werden die verbleibenden Damen und Herren neu einander zugelost, usw. Wie groß ist die erwartete Anzahl der Tänze, die die Kapelle spielen muss?

Hausaufgabe 6.III:
Sei X_n gleichverteilt auf den Zahlen $\{-n, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, n\}$. Man betrachte für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[\ |X_n| \geq \varepsilon\ ]$$

(a) Man gebe für $n = 1$ und $\varepsilon = 1$ an...

  (i) ... die exakte Abschätzung.

  (ii) ... die Abschätzung mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow.
  (Was fällt auf?)

(b) Man gebe für große $n \in \mathbb{N}$ und für $\varepsilon = \frac{n}{2}$ und $\varepsilon = \frac{n}{10}$ an...(Man mache insbesondere eine Aussage über den Limes $n \to \infty$.)

  (i) ...die exakten Abschätzungen.

  (ii) ...die Abschätzungen mit Hilfe der Tschebyschow'schen Ungleichung.

Hausaufgabe 6.IV:
Folgendes Spiel wird Ihnen vorgeschlagen: Ihr Startkapital ist $X_0 = 1$. Es wird wiederholt eine faire Münze ($\{0, 1\}$) geworfen. Zeigt die Münze '1', so gewinnen Sie $\frac{2}{3}$ ihres aktuellen Kapitals dazu, zeigt sie '0', so verlieren Sie die Hälfte Ihres aktuellen Kapitals. Beschreibe Y_i den Faktor mit dem sich das Kapital durch den i-ten Wurf ändert, außerdem werde durch X_i das Kapital nach Wurf i beschrieben, $i = 1, \ldots, n$.

1. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und definieren Sie die oben beschriebenen Zufallsvariablen darauf

2. Beschränken Sie sich auf das 1-malige Werfen der Münze, ist das Spiel vor- oder nachteilhaft?

3. Offensichtlich gilt:

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i.$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert von $\log(X_n)$ mit Hilfe dieser Darstellung. Man nutze das schwache Gesetz der großen Zahlen um eine Prognose für die Geldmenge "im langen Lauf" zu geben.