Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

7. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis **Freitag, 10.12.2010, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 7.I:
90% der in einer Radarstation eintreffenden Signale sind mit einer Störung überlagerte Nutzsignale, und 10% sind reine Störungen. Wird ein gestörtes Nutzsignal empfangen, so zeigt die Anlage mit Wahrscheinlichkeit 0.98 die Ankunft eines Nutzsignals an. Beim Empfang einer reinen Störung wird mit Wahrscheinlichkeit 0.1 fälschlicherweise die Ankunft eines Nutzsignals angezeigt.

(a) Modellieren Sie das Problem und definieren Sie die Zufallsvariablen X und Y, sodass sie folgendes leisten:

X : Zeigt an, ob Signal 'reine Störung' ($X = 1$) oder 'Nutzsignal' ($X = 0$) ist.
Y : Zeigt an, ob Signal 'richtig' ($Y = 1$) oder 'falsch' ($Y = 0$) interpretiert wird.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als Nutzsignal angezeigtes Signal wirklich ein (störungsüberlagertes) Nutzsignal?

(c) Berechnen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben Y.

(d) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y und interpretieren Sie ihn.

Hausaufgabe 7.II:
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ abzählbarer W'Raum. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathbb{P})$. Es existiere außerdem der Erwartungswert von Y. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{E}[\,Y\,] \;=\; \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{E}[\,Y \mid X = x\,] \cdot \mathbb{P}[\,X = x\,].$$

Hausaufgabe 7.III:
Sie werfen eine ideale $\{0,1\}$-Münze, zeigt diese '0', so werfen sie *einen* Würfel, zeigt sie '1', so werfen sie *zwei* Würfel.

(a) Geben Sie eine geeignete Modellierung an und definieren Sie diejenige Zufallsvariable S, die die Summe der Augenzahlen des Würfels / der Würfel angibt.

(b) Berechnen Sie die Verteilung von S, d.h. $\mathbb{P}_S$.

(c) Geben Sie die bedingte Verteilung des Ergebnisses der Münze an, gegeben, dass die Summe der Augenzahlen des Würfel / der Würfel 5 ist, d.h. $S = 5$.

(d) Berechnen Sie den zugehörigen bedingte Erwartungswert (des Ergebnisses der Münze, gegeben, dass $S = 5$).

Hausaufgabe 7.IV:
Zugrunde liege ein W'Raum $(\Omega, \mathbb{P})$. Wir betrachten ein Populationsmodell bei dem die Verteilung über die Anzahl der Nachkommen $N : \Omega \to \{0, 2, 4, 8\}$ unabhängig von der Generation gegeben ist durch

$$\mathbb{P}_N[k] = \frac{1}{2^{0.5k}}, k \in \{2, 4, 8\} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_N[0] = \frac{3}{16}.$$

Wir starten mit einem einzelnen Individuum.

(a) Geben Sie eine Definition des Populationsmodells an und berechnen Sie (*per Hand*) die erwartete Anzahl Individuen in der 2. Nachkommen-Generation.

(b) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion der oben angegebenen Verteilung $\mathbb{P}_N$.

(c) Nutzen Sie Ihr Wissen über Erzeugendenfunktionen um die erwartete Anzahl Individuen in der n-ten Nachkommen-Generation zu bestimmen. Berechnen Sie außerdem die Varianz dieser Zufallsgröße.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des entsprechenden Satzes aus der Vorlesung die Überlebenswahrscheinlichkeit der Population.