Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirt.-Math. Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2010/11

8. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis **Freitag, 17.12.2010, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 8.I: (Maximum der symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)
Wir betrachten eine Symmetrische Irrfahrt $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{Z}$ mit Start in $S_0 = 0$. Sei $M_n := \max\{S_i, i \leq n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $M_n \geq m$ genau dann wenn $S_i = m$ für ein $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

(b) Angenommen $k \leq m \leq n$. Zeigen Sie dass für jeden Pfad der $M_n \geq m$ und $S_n = k$ erfüllt, es einen anderen Pfad gibt der $S_n = 2m - k$ erfüllt.
Hinweis: Der zweite Pfad kann durch Reflektion in m erhalten werden, nachdem der erste Pfad m trifft.

(c) Nutzen Sie die Aussagen aus (a) und (b) und die Gleichverteilung der W'keit über die Pfade um zu zeigen:

$$\mathbb{P}\big[M_n \geq m,\ S_n = k\ \big] \ = \ \mathbb{P}\big[\ S_n = 2m - k\ \big], \quad k \leq m \leq n.$$

(d) Man nutze das Resultat aus (c) um zu zeigen, dass gilt:

$$\mathbb{P}\big[\ M_n = m, S_n = k\ \big] \ = \ \mathbb{P}\big[\ S_n = 2m-k\ \big] - \mathbb{P}\big[\ S_n = 2(m+1)-k\ \big], \quad k \leq m \leq n.$$

(e) Nutzen Sie das Resultat aus (d) um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt:

$$\mathbb{P}\big[\ M_n = m\ \big] = \begin{cases} \mathbb{P}\big[\ S_n = m\ \big] = \dbinom{n}{(m+n)/2}\dfrac{1}{2^n}, & (\star), \\[2ex] \mathbb{P}\big[\ S_n = m+1\ \big] = \dbinom{n}{(n+m+1)/2}\dfrac{1}{2^n}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$(\star)$: m und n sind beide gerade oder beide ungerade

Hausaufgabe 8.II: (zum Rutherford-Experiment)
Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr ausgerüstet treten wir einem Stück radioaktivem Präparat gegenüber. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass pro Sekunde 200 000 Teilchen zerfallen und dass jeder einzelne Zerfall von einem Geiger-Zähler mit W'Keit $0.2 \cdot 10^{-5}$ registriert und signalisiert wird (unabhängig und identisch).

(a) Geben Sie einen geeigneten W'Raum an und eine Zufallsvariable S, die (durch den Geiger-Zähler) signalisierte Teilchen in einer Sekunde zählt.

(b) Berechnen Sie K, sodass die (approximative) W'keit mehr als K Teilchenzerfälle in einer Sekunde zu registrieren unter 1% sinkt. Begründen Sie die von Ihnen genutzte Approximation.

(c) Schätzen Sie den folgenden Fehler ab:

$$\Big| \, \mathbb{P}[\ S = K\ ] - \mathrm{Poi}_\lambda\,[\ K\ ] \, \Big|$$

Hausaufgabe 8.III: (Roulette)
Weil Sie über die langweiligen Feiertage mit Freunden statt Pokern auch mal Roulette spielen wollen und Sie bereits wissen, dass, strategieunabhängig, die Chancen gut stehen, dass am Ende alles der Bank gehört, haben Sie sich Gedanken zu folgender aufwandsarmer Strategie überlegt: Sie setzen beim Roulette (18 rote, 18 schwarze Felder, 1 weißes Feld für die '0') 37mal in Folge auf die '0'.

1. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeiten für $k = 0, \dots, 8$ Gewinne mit Hilfe der Poisson-Verteilung zu geeignetem Parameter. Warum ist diese Approximation hier angebracht? Berechnen Sie dann die exakten W'keiten.

2. Sie haben kein Roulette-Rad, aber einen Würfel. Führen Sie die Berechnung aus (a) für die Strategie "6mal in Folge auf '6' setzen" durch.

Hausaufgabe 8.IV:
Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt auf $(\Omega, \mathbb{P})$ zu Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\big[X \leq n\big] = \frac{1}{n!} \int_\lambda^\infty x^n e^{-x}\, dx \quad n \in \mathbb{N}.$$