

9. Aufgabenblatt zur Stochastik A

Abgabe bis Montag, 10.1.2011, 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Katharina von der Lühe PF 200, Manuel Förster PF 150, Daniel Altemeier PF 161*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 9.I:

Ein Hotel hat n Betten. Wir nehmen an, dass Gäste unabhängig und identisch mit $1 - p \in (0, 1)$ erscheinen.

- Wie viele Reservationen K_0 dürfen angenommen werden, wenn das Hotel mit maximaler W'keit $\alpha \in (0, 1)$ überbucht sein soll?
Geben Sie diese Zahl konkret für $n = 100, p = 0.1, \alpha = 0.05$ an.
- Sei nun $n = 100, p = 0.1, \alpha = 0.05$. Berechnen Sie die exakten Wahrscheinlichkeiten für k Besucher, wobei nur $n < k \leq K_0$ berücksichtigt werden sollen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus b) mit Hilfe der Poissonverteilung und kommentieren Sie Ihr Ergebnis.
- Berechnen Sie die W'keit aus b) mit Hilfe und der Normalverteilung (mit und ohne Stetigkeitskorrektur (± 0.5)) und kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

Hausaufgabe 9.II:

Sei A_1, A_2, \dots Borel'sche Mengen in \mathbb{R} und sei B die Menge aller $\omega \in \mathbb{R}$, die für jedes n in n aufeinanderfolgenden Mengen A_i vorkommen. Zeigen Sie, dass B Borel'sch ist.

Hausaufgabe 9.III:

Buchhalter Fleißig kommt jeden Tag gegen 8:00 Uhr ins Büro. Mal kommt er etwas zu früh, mal etwas zu spät, aber immer zwischen 7:50 Uhr und 8:10 Uhr. Mit T bezeichnen wir die Zeit, um die er vor oder nach 8 Uhr erscheint; gemessen in Minuten. Wir wollen annehmen, dass die Zufallsgröße T die folgende Dichte besitzt:

$$f(t) = \begin{cases} c(100 - t^2) & \text{für } -10 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstante c .
- (b) Berechnen Sie die W'keit, dass Herr Fleißig vor 8 Uhr eintrifft.
- (c) Berechnen Sie die W'keit, dass Herr Fleißig zwischen 7:55 Uhr und 8:00 Uhr eintrifft.

Wählen Sie eine der beiden folgenden Aufgabenoptionen aus, die erfolgreiche Bearbeitung beider Aufgaben wird mit Bonus-Punkten honoriert.

Hausaufgabe 9.IV OPTION 1:

Man zeige, dass sich das schwache Gesetz der großen Zahlen für Familien von Bernoulli-Zufallsvariablen aus dem zentralen Grenzwertsatz folgern lässt.

Hausaufgabe 9.IV OPTION 2: (Lokale Normalapproximation von Poisson-Verteilungen)
Sei $\lambda > 0$ und $x_\lambda(k) = (k - \lambda)/\sqrt{\lambda}$. Zeigen Sie: Für jedes $c > 0$ gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{k \in \mathbb{Z}_+ : |x_\lambda(k)| \leq c} \left| \frac{\sqrt{\lambda} \text{Poi}_\lambda[k]}{\varphi(x_\lambda(k))} - 1 \right| = 0$$

ANLEITUNG:

Schritt: I Vergewissern Sie sich, dass für *große* λ und $k \in \mathbb{Z}_+$ mit $x_\lambda(k) \leq c$ gilt:

$$k \approx \lambda.$$

Schritt: II Nutzen Sie Schritt I und die Stirling'sche Formel um zu zeigen, dass für große λ gilt:

$$\text{Poi}_\lambda[k] \approx \exp \left[-\lambda \cdot g \left(\frac{k}{\lambda} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}},$$

wobei $g(s) = 1 - s + s \log(s)$.

Schritt: III Machen Sie nun eine Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 von g von 1 zur Stelle $k/\lambda = 1 + x_\lambda(k)/\sqrt{\lambda}$ und schätzen Sie den Restterm ab.

Schritt: IV Zeigen Sie nun den obigen Grenzwert mit Hilfe der Schritte I-III.