Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 1

Abgabe bis **Donnerstag, 20.10.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 1.I (*Satz 1.6 aus der Vorlesung:*)
Zeigen Sie Satz 1.6 aus der Vorlesung:

> **Satz 1.6:** *(Stetigkeit von Maßen für auf-/absteigende Familien)*
>
> Es seien μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathcal{F}$ sowie $A \in \mathcal{F}$.
>
> a)
> $$A_n \downarrow A \quad \text{und } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \mu\big(A_{n_0}\big) < \infty \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
>
> b)
> $$A_n \uparrow A \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
>
> c)
> $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Übungsaufgabe 1.II
Sei eine Indexmenge I gegeben durch $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{N}$ und sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Zerlegung* der Menge Ω, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und $\Omega = \dot{\bigcup}_{n\in I} A_n$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \big\{ \dot{\bigcup}_{n\in J} A_n \big| J \subseteq I \big\}$ eine σ-Algebra ist.

Übungsaufgabe 1.III

Es seien $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} := \big\{A \subset \mathbb{N} \big| A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\big\}$. Ferner sei $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ für alle $A \in \mathcal{F}$ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{, falls } A \text{ unendlich} \\ 0 & \text{, falls } A \text{ endlich.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine Algebra, aber keine σ-Algebra ist und dass μ ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{F}$ ist.

b) Ist μ σ-additiv?

c) Ist μ stetig in $\emptyset$?

d) Lässt sich μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{F})$ fortsetzen?

Übungsaufgabe 1.IV

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen darauf. Zeigen Sie, dass $f + g$ eine messbare Funktion ist.

b) Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und sei $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra auf Ω'. Zeigen Sie, dass durch $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{F}')$ eine σ-Algebra auf Ω gegeben ist.