Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 10 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 22.12.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 10.I

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Es gebe die Darstellung $\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$, und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Sei außerdem $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \mathbb{P}[A_i]>0}}^{n} \left(\frac{1}{\mathbb{P}[A_i]} \int_{A_i} Y d\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{A_i}.$$

ist eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[Y|\mathcal{D}]$ für $\mathcal{D} = \sigma\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Übungsaufgabe 10.II

Es seien $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit einer Dichte f bezüglich des Lebesgue-Maßes und $Y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eine Zufallsgröße. Es sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ die σ-Algebra der zum Nullpunkt symmetrischen Borelmengen, d.h.

$$\mathcal{C} := \big\{ B \in \mathcal{B} : \text{ Es existiert } D \in \mathcal{B}([0,\infty)) \text{ mit } B = D \cup (-D). \big\}$$

wobei $\mathcal{B}([0,\infty)) = \{B \cap [0,\infty) : B \in \mathcal{B}\}$ die Borelmengen des Intervalls $[0,\infty)$ und $-D := \{x \in \mathbb{R} : -x \in D\}$ die am Nullpunkt gespiegelte Menge D bezeichnen.

a) Zeigen Sie, dass Z mit

$$Z(x) := \begin{cases} \frac{Y(x)f(x)+Y(-x)f(-x)}{f(x)+f(-x)} & \text{, falls } f(x)+f(-x) > 0, \\ 0 & \text{, sonst,} \end{cases}$$

eine Version des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[Y|\mathcal{C}]$ ist.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}\big[[1,3]|\mathcal{C}\big]$ im Fall, dass die Dichte f eine gerade Funktion ist.

Übungsaufgabe 10.III

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine Zufallsgröße. Auf $H := \{Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : Y \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar } \}$ sei die Abbildung f durch $f(Y) := \mathbb{E}\big[(X - Y)^2\big]^{1/2}$ definiert. Zeigen Sie:

$$f(Y) \text{ ist minimal} \quad \Leftrightarrow \; Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \; \mathbb{P}\text{- fast sicher.}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]\big) + \big(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] - Y\big)^2\big]$.