Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 11 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 12.1.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 11.I
Zeigen Sie, dass die Gleichverteilung auf $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ für $n \to \infty$ schwach gegen die uniforme Verteilung auf $[0, 1]$ konvergiert.

Übungsaufgabe 11.II
Es seien $\alpha > 0$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, uniform auf $[0, \alpha]$ verteilter Zufallsgrößen sowie $Y_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $Z_n := n(\alpha - Y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von Z_n für $n \to \infty$ schwach gegen die Exponentialverteilung mit Parameter $1/\alpha$ konvergiert.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung zum Parameter $1/\alpha$ ist gegeben durch

$$F(t) = \big(1 - \exp(t/\alpha)\big)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Übungsaufgabe 11.III
Es sei (S, d) ein metrischer, separabler Raum, und X und X_n (für $n \in \mathbb{N}$) seien Zufallvariablen mit Werten in S, messbar bezüglich der Borelmengen $\mathcal{B}_S$ über S.

a) Zeigen Sie: Falls X $\mathbb{P}$-fast sicher konstant ist und $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$ gilt, so konvergiert X_n gegen X in Wahrscheinlichkeit, d.h.

$$\mathbb{P}[d(X_n, X) > h] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ für alle } h > 0.$$

b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass $\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P}X^{-1}$ im allgemeinen nicht die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von X_n gegen X impliziert.