Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 12 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 19.1.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 12.I

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Familie von normalverteilten Zufallsvariablen, genauer sei X_n verteilt gemäß $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \geq 1$. Außerdem sei X eine Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{\text{w}} \mathbb{P}X^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ gegen einen Grenzwert $\mu \in \mathbb{R}$ konvergiert und die Folge $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ gegen $\sigma^2 \geq 0$ konvergiert. Zeigen Sie dann, dass X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist.

Übungsaufgabe 12.II

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ und $(Y_n)_{n\geq 1}$ Folgen von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Angenommen

$$\mathbb{P}X_n^{-1} \xrightarrow{\text{w}} \mathbb{P}X^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}Y_n^{-1} \xrightarrow{\text{w}} \mathbb{P}Y^{-1}.$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass X_n und Y_n für alle n unabhängig sind und dass X und Y unabhängig sind. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X_n + Y_n)^{-1} \xrightarrow{\text{w}} \mathbb{P}(X + Y)^{-1}.$$

Übungsaufgabe 12.III

Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, d-dimensionaler Zufallsvektoren. Es gelte $\mathbb{E}[|X_1|^2] < \infty$. Seien $a = \mathbb{E}[X_1]$ und $\Sigma = \operatorname{cov}(X_1)$ die Kovarianzmatrix jedes einzelnen X_n, $n \geq 1$.

a) Sei Z eine normalverteilte Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Wir bezeichnen den Erwartungswert von Z mit μ_Z und die Kovarianzmatrix mit Σ_Z. Zeigen Sie, dass $g_x(Z) = \langle x, Z\rangle$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $g_x(Z)$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)\right)^{-1}$$

für $n \to \infty$ schwach gegen die d-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix Σ konvergiert.

Hinweis: Denken Sie daran, eine Fallunterscheidung nach $\mathbb{V}[g_x(X_1)] = 0$ oder $\mathbb{V}[g_x(X_1)] \neq 0$ zu machen.