

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 2 - Teil A *Ausgabe 2*

Abgabe bis **Donnerstag, 27.10.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 2.I (*Beschränkte Konvergenz*)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein (σ -endlicher) Maßraum mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty \forall n \geq 1$. Seien ausserdem $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, d.h. $\int |f_n| d\mu < \infty$ und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ , d.h.

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 : \mu(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty.$$

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zudem integrierbar.

a) Sei $f \geq 0$ und $a \wedge b := \min(a, b)$; zeigen Sie:

$$\int_{E_n} f \wedge n d\mu \uparrow \int f d\mu.$$

b) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz über beschränkte Konvergenz¹

Falls eine Menge $E \subseteq \Omega$ existiert mit $\mu(E) < \infty$ und ein $M \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n| \leq M$, $|f| \leq M$ und $f_n = 0$ auf E^c für alle $n \geq 1$, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Anleitung: Betrachten Sie die Differenz $|\int f d\mu - \int f_n d\mu|$, nutzen Sie, dass $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$. Schränken Sie das Integral separat auf $G_n := \{|f_n - f| < \varepsilon\}$ und G_n^c ein. Der Rest ist eine einfache Anwendung der Voraussetzungen.

¹Man bemerke, dass dieser Satz nur ein Spezialfall des *Satzes von Lebesgue* oder *Satz der dominierten Konvergenz* ist

Übungsaufgabe 2.II (Lemma von Fatou)

Zeigen Sie den folgenden Satz:

Lemma von Fatou: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein (σ -endlicher) Maßraum und seien $f_n \geq 0$, $n \geq 1$, messbare Funktionen darauf, dann gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Anleitung: Für $g_n(x) := \inf_{m \geq n} f_m(x)$ gilt punktweise $f_n(x) \geq g_n(x)$ und $g_n(x) \uparrow g(x) = \liminf f_n(x)$. Es reicht zu zeigen, dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \geq \int g d\mu$.

Übungsaufgabe 2.III (Vitali-Mengen)

Nicht alle Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ sind Borel-messbar, aber es erfordert tatsächlich einigen Aufwand eine solche nicht-Borel-messbare Menge zu konstruieren.

- a) Zeigen Sie, dass durch die unten definierte binäre Relation \sim eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellen Zahlen gegeben ist:

$$a \sim b \text{ falls } a - b \in \mathbb{Q}.$$

(Zu zeigen sind: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität)

- b) Zeigen Sie, dass jede dieser durch ' \sim ' definierten Klassen mindestens einen Vertreter in $[0, 1]$ besitzt.
- c) Sei nun $C_{[0,1]} \subseteq [0, 1]$ so gewählt, dass jeweils genau ein Vertreter jeder Klasse enthalten ist (hier braucht man das Auswahlaxiom). Definiere nun

$$V := C_{[0,1]} + \mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{a + b \mid a \in C_{[0,1]}, b \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]\}.$$

- (i) Man zeige, dass $[0, 1] \subseteq V$ und dass $V \subseteq [-1, 2]$.
- (ii) Angenommen V wäre Borel-messbar, dann könnten wir das Lebesgue-Maß λ von V bestimmen. Betrachte also $\lambda(V)$. Man zeige zunächst, dass

$$V = \dot{\bigcup}_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \{C_{[0,1]} + q\}$$

und wende dann σ -Additivität an.²

- d) Man folgere nun aus den Ergebnissen von c), dass V nicht Borel-messbar ist.³

²Verwenden Sie hier außerdem die *Translationsinvarianz* des Lebesgue'schen Maßes, d.h.

$$\lambda(A + c) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ und } c \in \mathbb{R}.$$

³Die Menge V ist eine sogenannte *Vitali-Menge*.