Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 2 - Teil B

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen

Übungsaufgabe 2.IV

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion darauf. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$\overline{f} = \frac{|f|}{1 + |f|}$$

integrierbar ist.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ nun ein *endlicher* Maßraum. Kann die Voraussetzung von oben hier abgeschwächt werden ohne dabei die Integrierbarkeit von $\overline{f}$ zu verlieren?

c) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion darauf. Geben Sie zu den unten stehenden Behauptungen jeweils an ob sie *immer wahr* oder *immer falsch* sind oder ob es Beispiele gibt, in denen sie zutreffen, und Beispiele, in denen sie nicht zutreffen (kommentieren Sie diesen Fall mit *unklar*).

(i) Ist f messbar, so ist auch $|f| + 1$ messbar.

(ii) Ist f integrierbar, so ist auch $|f| + 1$ integrierbar.

(iii) Sei $\{f_n\}_{n \geq 1}$ Folge messbarer Funktionen mit $f_n \to f$ gleichmässig und sei außerdem f integrierbar, dann gilt:

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$