

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 3 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 3.11.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 3.I (*Radon-Nikodym*)

Seien μ, ν und α endliche Maße auf (Ω, \mathcal{F}) mit $\nu \ll \mu \ll \alpha$.

a) Zeigen Sie, dass für eine ν -integrierbare Funktion f gilt:

$$\int f d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

(Hinweis: Durch *maßtheoretische Induktion*, d.h. man zeige die Aussage nacheinander für die folgenden Klassen von Funktionen f :

1. Indikatorfunktionen
2. einfache (Treppen-) Funktionen
3. messbare nichtnegative Funktionen)

b) Folgern Sie aus Teil a) die Kettenregel für die Radon-Nikodym-Ableitung:

$$\frac{d\nu}{d\alpha} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\alpha} \quad \alpha\text{-f.ü.}$$

Hausaufgabe 3.II Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ und $q = 1 - p$ definiere

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\}.$$

Dann ist die *Binomialverteilung* zu n und p über $\{0, \dots, n\}$ definiert durch

$$\text{bin}_{n,p}(A) = \sum_{k=0}^n b_{n,p}(k) \delta_{\{k\}}(A) \text{ für } A \in \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}).$$

- Zeigen Sie, dass $\text{bin}_{n,p}$ ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F}) ist mit $\Omega = \{0, \dots, n\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$.
- Wir wollen das W'Maß $\text{bin}_{n,p}$ auf $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}$ erweitern. Geben Sie zwei unterschiedliche, geeignete σ -Algebren an.
- Seien $p, \bar{p} \in [0, 1]$. In welchen Fällen gilt $\text{bin}_{n,p} \ll \text{bin}_{n,\bar{p}}$?
- Berechnen Sie die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\text{bin}_{n,p}}{d\text{bin}_{n,\bar{p}}}$ für jene p, \bar{p} für die diese existiert.
- Zeigen Sie für das Beispiel $A = \{0, 1, \dots, m\}$ mit $m \leq n$, dass die in d) berechnete Dichte richtig ist.

Übungsaufgabe 3.III Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum.

- Für eine beliebige Zufallsvariable X sei $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$. Die Funktion $F_X(\cdot)$ heißt (kumulative) Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X . Zeigen Sie, dass $F_X(\cdot)$ folgende Eigenschaften erfüllt:
 - $x \leq x' \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(x')$
 - $\lim_{x \uparrow \infty} F_X(x) = 1, \lim_{x \downarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
 - $\lim_{x_k \downarrow x} F_X(x_k) = F_X(x)$ (Rechtsstetigkeit).
- Seien F_1, F_2, \dots Verteilungsfunktionen, die obenstehende Eigenschaften erfüllen. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$F^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \prod_{k=1}^n F_k(x_k), n \in \mathbb{N}$$

eine *konsistente* Familie von Verteilungsfunktionen bilden, d.h.

$$\lim_{x_n \uparrow \infty} F^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = F^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ für alle } n \geq 1.$$