Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 4 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 10.11.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 4.I

a) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge der Folgen in $\mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_1, x_2, \ldots) | x_i \in \mathbb{R} \; \forall \, i \in \mathbb{N}\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{Z}_n$ die Menge *aller* n-dimensionalen Zylindermengen, d.h.

$$\mathcal{Z}_n := \big\{\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_1, \ldots, x_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n\} \big| I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervalle}\big\}.$$

Definiere nun die Menge aller Zylindermengen $\mathcal{Z}$ als $\mathcal{Z} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$.

(i) Bilden die n-dimensionalen Zylindermengen $\mathcal{Z}_n$ eine Algebra? Welche Bedingungen werden erfüllt, welche sind verletzt?

(ii) Gilt $\sigma(\mathcal{Z}_n) = \left(\pi^{(n)}\right)^{-1}(\mathcal{B}^{\mathbb{N}})$ für die auf dem Folgenraum definierte σ-Algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$? Belegen Sie Ihre Antwort.

(iii) Gilt $\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$? Belegen Sie Ihre Antwort.

(iv) Sei $\mathbb{P}$ ein σ-additiver Inhalt auf den Zylindermengen $\mathcal{Z}$. Existiert eine Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{Z})$? Ist diese eindeutig?

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Sei $F = \{x_i\}_{i \geq 1}$ eine abzählbare Menge. Bezeichne mit $F^{\mathbb{N}}$ die Menge der Folgen in F und mit $\mathcal{P}(F)$ die Potenzmenge von F.

(i) Zeigen oder widerlegen Sie: Eine Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (F, \mathcal{P}(F))$ ist eine Zufallsvariable genau dann, wenn $\{\omega | X(\omega) = x_j\} \in \mathcal{F}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(ii) Seien X, Y zwei stochastische Prozesse mit Werten in F. Zeigen Sie, dass X und Y die gleiche Verteilung besitzen genau dann, wenn gilt:

$$\mathbb{P}[X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n] = \mathbb{P}[Y_1 = t_1, \ldots, Y_n = t_n]$$

für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 4.II (∞-*facher* Münzwurf)
Sei $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Münzwurf die 1 erscheint.

a) Geben Sie ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für den n-fachen $\{0,1\}$-Münzwurf an, $n \in \mathbb{N}$.

Mittels zweier verschiedener Methoden wollen wir nun die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraumes für den ∞-oft wiederholten Münzwurf zeigen.

b) (i) Definieren Sie einen geeigneten Markovkern für das Experiment mit $n = 1$. Weisen Sie die Eigenschaften des Markovkerns nach.

(ii) Benutzen Sie nun die Resultate der Vorlesung, um die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})\big)$ zu zeigen, dessen Projektion $\mathbb{P}(\pi^{(n)})^{-1}$ auf die ersten n Koordinaten jeweils der n-fach wiederholte Münzwurf $\mathbb{P}^{(n)}$ ist.

c) (i) Geben Sie explizit die *Zylindermengen* $\mathcal{Z}$ für den ∞-oft wiederholten Münzwurf an und definieren Sie $\mathbb{P}$ für diese Mengen.

(ii) Geben Sie zwei verschiedene Teilmengen von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ an, die nicht in $a(\mathcal{Z})$ liegen, wobei $a(\mathcal{Z})$ die kleinste Algebra ist, die alle Zylindermengen enthält.

Übungsaufgabe 4.III
Seien μ und ν endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) Zeigen Sie, dass für μ- und ν-integrierbare Funktionen f gilt:

$$\int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu.$$

b) Wir führen das Zufallsexperiment auf folgende Art und Weise aus. Wir werfen zunächst eine $\{0,1\}$-Münze die mit W'keit p eine 1 zeigt. Falls die Münze eine 1 zeigt, werfen wir zwei faire W4-Würfel (Tetraeder) und das Ergebnis ist die Differenz der Augenzahlen (Dies ist so zu verstehen, dass es einen "ersten" und einen "zweiten" Würfel gibt, d.h. es können auch negative Werte auftreten). Zeigt die Münze 0, so benutzen wir als Ergebnis den Wert einer $\mathcal{N}_{0,1}$-verteilten Zufallsgröße.

(i) Konstruieren Sie einen geeigneten W'Raum $(\Omega_d, \mathcal{F}_d, \mathbb{P}_d)$ für das Werfen von 2 W4-Würfeln. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen D die die Differenz der beiden Würfel angibt.

(ii) Geben Sie einen geeigenten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_M, \mathcal{F}_M, \mathbb{P}_M)$ für den $\{0,1\}$-Münzwurf an.

(iii) Definieren Sie einen Übergangskern $K(\cdot,\cdot) : \{0,1\} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ für das beschriebene Experiment.

(iv) Schreiben Sie das W'Maß $\big(\mu \otimes K\big)\pi_2^{-1}$ in geschlossener Form auf und berechnen Sie den zugehörigen Erwartungswert.