Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 5 - Teil A *Ausgabe 2*

Abgabe bis **Donnerstag, 17.11.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 5.I
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum.

a) Sei X eine nichtnegative Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Mittel μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, beide endlich. Zeigen Sie, dass für beliebige $b > 0$:

$$\mathbb{P}\big[X \geq \mu + b\sigma\big] \leq \frac{1}{1+b^2}.$$

(*Hinweis:* Formen Sie $X \geq \mu + b\sigma$ geeignet um zu $g(x) \geq \dots$ mit $g(x) = \frac{((x-\mu)b+\sigma)^2}{\sigma^2(1+b^2)}$)

b) Sei X nun eine eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Mittel μ und Varianz σ^2. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[\mu - d\sigma < X < \mu + d\sigma] \geq 1 - \frac{1}{d^2}.$$

c) Sei X eine *normalverteilte* Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = 1$. Zeigen Sie dass gilt

$$\mathbb{P}[X > x] \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \text{ für } x > 0.$$

Übungsaufgabe 5.II
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum. Die Zufallsvariable X sei $\mathcal{N}(0,1)$-(normal-)verteilt.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0$ und $\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei X eine d-dimensional normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und positiv definiter reeller symmetrischer $d \times d$-Kovarianzmatrix Σ.

   (i) Zeigen Sie, dass
$$\langle \lambda, X \rangle \sim \mathcal{N}_{\langle \mu, \lambda \rangle, \langle \lambda, \Sigma\lambda \rangle} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^d$$

   (ii) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion gegeben ist durch
$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\langle t, \mu\rangle\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle t, \Sigma t\rangle\right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^d.$$

Übungsaufgabe 5.III
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum; Sei $X = (X_1, X_2)$ uniform verteilt auf dem Dreieck, das durch die Punkte $(0,0), (2,0)$ und $(0,2)$ in der $\mathbb{R}^2$-Ebene aufgespannt wird, d.h. die Verteilung von X hat die Dichte $f(x_1, x_2) = \mathbb{1}_D(x_1, x_2)/N$ bzgl. des Lebesgue-Maßes λ_2 auf $\mathbb{R}^2$. Dabei ist D das oben beschriebene Dreieck und N die Normierung, die f zu einer Dichte macht.

a) Bestimmen Sie die Normierung und berechnen Sie den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix $\Sigma(X)$ von X.

b) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X und berechnen Sie mit deren Hilfe erneut den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix.