Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 6 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 24.11.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 6.I
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Zeigen Sie, dass für eine stetige Abbildung f gilt:

$$\text{Aus } \Big(X_n \to X \text{ in Wahrscheinlichkeit} \Big) \text{ folgt } \Big(f(X_n) \to f(X) \text{ in Wahrscheinlichkeit} \Big).$$

Hinweise:

(i) Nehmen Sie zunächst an, dass ein k existiert mit $|X(\omega)| \leq k$ für alle $\omega \in \Omega$. Nutzen Sie das $\varepsilon - \delta$-Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit von f auf der kompakten Menge $[-k-1, k+1]$.

(ii) Verallgemeinern Sie Ihren Beweis auf allgemeine Zufallsgrößen X.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass bei der Aussage aus a) nicht ohne weiteres auf die Annahme der Stetigkeit verzichtet werden kann.

Hinweis:
Wählen Sie $f(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ und betrachten Sie $X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.

Übungsaufgabe 6.II

Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nutzen Sie die unten stehenden Hinweise um die folgende Äquivalenz zu zeigen:

$$X_n \to X \text{ in Wahrscheinlichkeit} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] = 0.$$

Hinweis:
Schreiben Sie den Erwartungswert als Integral, spalten Sie den Integrationsbereich geeignet auf und schätzen Sie nach oben bzw. nach unten ab.

Übungsaufgabe 6.III *(mehr zur dominierten Konvergenz)*

Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und es gelte $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit. Es gelte außerdem

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, \omega \in \Omega : |X_n(\omega)| \leq C \text{ für ein } C \geq 0.$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[|X_n - X|\big] = 0.$$

Hinweis:
Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{P}[|X| \leq C] = 1$.