

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 6 - Teil B

Zur Bearbeitung in den Übungsgruppen

Übungsaufgabe 6.IV

Seien X und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Geben Sie mit Hilfe der Übungsaufgaben 6.I einen weiteren Beweis der folgenden Aussage:

Angenommen $X_n \rightarrow X$ in Wahrscheinlichkeit. Dann gibt es eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k} = X \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Hinweis:

Wählen Sie die Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sodass

$$\mathbb{E} \left[\frac{|X_{n_k} - X|}{1 + |X_{n_k} - X|} \right] < \frac{1}{2^k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Erinnerung: Die Aussage von Übungsaufgabe 6.I:

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right] = 0.$$