Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 7 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 1.12.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 7.I

a) Seien X und Y unabhängig und $\mathbb{P}[X+Y=\alpha]=1$ für ein $\alpha\in\mathbb{R}$ konstant.

Zeigen Sie, dass X und Y konstante Zufallsvariablen sind (d.h. $\mathbb{P}$-fast sicher konstant).

b) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie reellwertiger Zufallsgrößen auf einem W'Raum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathcal{F}_n := X_n^{-1}(\mathcal{B})$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \mathcal{F}_n\right).$$

Zeigen Sie

$$\left\{\omega\in\Omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ konvergiert}\right\} \in \mathcal{T}_\infty.$$

Übungsaufgabe 7.II

a) Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}^n, Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ zwei Zufallsvektoren. Zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn

$$\mathbb{E}\left[\exp(i\langle s, X\rangle + i\langle t, Y\rangle)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(i\langle s, X\rangle)\right] \cdot \mathbb{E}\left[\exp(i\langle t, Y\rangle)\right]$$

für alle $s \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}^m$ gilt.

b) Zeigen Sie, durch ein Beispiel, dass die Umkehrung von Satz 3.13 nicht gilt.

Hinweise:

a) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen von $\mathbb{P}(X,Y)^{-1}$ und $\mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}$.

b) Wählen Sie $\Omega = \{0, 1, 2\}^2$ mit der Gleichverteilung $\mathbb{P}$, und konstruieren Sie zu einem Parameter $\alpha \in (0, 1/9]$ ein W'Maß $\mathbb{P}_\alpha$ derart, dass die beiden Projektionen X und Y sowie $X + Y$ die gleichen Verteilungen unter $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}_\alpha$ haben.

Übungsaufgabe 7.III

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}^n, Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ zwei gemeinsam normalverteilte Zufallsvektoren, das heißt $\mathbb{P}(X,Y)^{-1}$ ist eine $n + m$-dimensionale Normalverteilung. Zeigen Sie:

$$X, Y \text{ unabhängig } \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0.$$

Hinweise:

'$\Rightarrow$' Verwenden Sie einen geeigneten Satz aus der Vorlesung für die Komponenten der Kovarianzmatrix.

'$\Leftarrow$' Definieren Sie $Z : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ durch $Z = (X, Y)$, betrachten Sie die Gestalt der Kovarianzmatrix $\Sigma(Z)$, und verwenden Sie Aufgabe 7.II(a).