Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/2012

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 8 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 8.12.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 8.I (Zum Borel-Cantelli-Lemma)

a) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass für unabhängige $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}\text{-f.s. - Konvergenz (gegen } X).$$

b) Die wöchentliche Lottoziehung (6 aus 49 zzgl. Zusatzzahl) sei unendlich oft fortgesetzt gedacht. Es sei E das Ereignis, dass in einer Woche die Zahlen $1, 2, \dots, 6$ und die Zusatzzahl 7 gezogen werden, in der darauffolgenden Woche die Zahlen $8, 9, \dots, 13$ und die Zusatzzahl 14 gezogen werden, ... und in der sechsten Folgewoche schließlich die Zahlen $43, 44, \dots, 48$ mit der Zusatzzahl 49 gezogen werden. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und zeigen Sie, dass das Ereignis E unendlich oft eintritt.

Übungsaufgabe 8.II

Es sei $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathbb{P})$ ein W'Raum und $T(x) := x^2$ für ein $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass T genau dann maßerhaltend ist, wenn $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$ gilt.

Hinweis: zu '$\Rightarrow$': Betrachten Sie $\mathbb{P}T^{-n}[[x,1]]$ für $x \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 8.III

Es sei T eine maßerhaltende Transformation auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Man bezeichnet T als *schwach mischend*, falls für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}[A \cap T^{-j}B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B].$$

Zeigen Sie, dass T genau dann schwach mischend ist, wenn T ergodisch ist.

Hinweis zu '$\Leftarrow$': Wenden Sie den Ergodensatz auf $\mathbb{1}_B$ an.