Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2011/12

1. Präsenzübung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Präsenzübung 1.I *(Beweis von Lemma 1.6 und Bemerkung 1.6)*
Beweisen Sie das Lemma 1.6 und die Bemerkung 1.6 aus der Vorlesung:

Lemma 1.6:
Sei μ ein Maß auf $\mathcal{F}$, dann gilt:

$$\mu \text{ ist } \sigma\text{-endlich} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} : A_n \uparrow \Omega \text{ und } \mu(A_n) < \infty \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 1.6:
Ein endlicher Inhalt ist genau dann σ-additiv, wenn für jede Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}$ die folgende Implikation gilt:

$$A_n \downarrow \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_n) \searrow 0.$$

("μ ist stetig in $\emptyset$")

Präsenzübung 1.II

a) Zeigen Sie, ganz allgemein, dass für eine Familie $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von σ-Algebren über einer Menge Ω stets gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \text{ ist wieder eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

b) Geben Sie auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ zwei σ-Algebren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ an, so dass $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ <u>keine</u> σ-Algebra ist.

c) Zeigen Sie anhand des Beispiels

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{und} \quad \mathcal{D} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \Omega\},$$

dass die Eindeutigkeit von Maßen (Korollar 1.9 nach dem Erweiterungssatz von Carathéodory) falsch wird, wenn das Mengensystem nicht durchschnittsstabil ist.
(Vergewissern Sie sich, dass $\mathcal{D}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}(\Omega)$ ist und geben Sie zwei Maße μ und ν auf $\sigma(\mathcal{D})$ an, sodass ein $A \in \sigma(\mathcal{D})\backslash\mathcal{D}$ existiert mit $\mu(A) \neq \nu(A)$, aber für alle $A \in \mathcal{D}$: $\mu(A) = \nu(A)$)

Präsenzübung 1.III *(Borel-Mengen über $\mathbb{R}$)*
In der Vorlesung wurden die Borel-Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma\left(\left\{(-\infty, a)\middle| a \in \mathbb{R}\right\}\right).$$

Zeigen Sie, dass

a) $\mathcal{D}_1 := \left\{(a, b)\middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\mathcal{D}_2 := \left\{[a, b)\middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$

Erzeugendensysteme von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind. Reicht es aus das Lebesgue-Maß auf diesen Erzeugendensystemen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ zu definieren?

Präsenzübung 1.IV *(Messbarkeit von $f \cdot g$)*
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ darauf messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g$ messbar ist.