Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 1

Abgabe bis **Freitag, 25.10.2013, 14:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 1.I

a) Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und I eine beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass stets gilt:

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \text{ ist wieder eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

b) Sei $\mathcal{E} \neq \emptyset$ irgendeine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$, mit $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie die Existenz einer kleinsten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält.

c) Geben Sie auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ zwei σ-Algebren $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ an, so dass $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ <u>keine</u> σ-Algebra ist.

Hausaufgabe 1.II

a) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge, μ ein Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, $\alpha \geq 0$ eine Konstante. Definiere die Abbildung $\alpha\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch $(\alpha\mu)(A) = \alpha\mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\alpha\mu$ ein Maß ist.

b) Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und μ_1, μ_2 Maße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass $\mu_1 + \mu_2$, definiert durch

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A},$$

ein Maß ist.

c) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Seien außerdem $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ derart, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Zeigen Sie, dass durch

$$\big(\lambda_1\mathbb{P}_1 + \lambda_2\mathbb{P}_2\big)(A) = \lambda_1\mathbb{P}_1[A] + \lambda_2\mathbb{P}_2[A] \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird.

Hausaufgabe 1.III

a) Sei eine Indexmenge I gegeben durch $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{N}$ und sei $\{A_n\}_{n\in I}$ eine *Zerlegung* der Menge Ω, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und $\Omega = \dot{\bigcup}_{n\in I} A_n$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \left\{ \dot{\bigcup}_{n\in J} A_n \middle| J \subset I \right\}$ eine σ-Algebra ist.

b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Mengen $A \subset \Omega$ für die gilt, dass entweder A abzählbar ist oder A^c abzählbar ist. Definiere außerdem $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ durch

$$\mathbb{P}[A] = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar.} \end{cases}$$

In der Präsenzübung 1.I zeigen wir, dass $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeit auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Sei außerdem $\Omega' = \{0, 1\}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$ und $T : \Omega \to \Omega'$ definiert durch

$$T(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ irrational,} \\ 0 & \text{falls } \omega \text{ rational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass T eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbare Abbildung ist und bestimmen Sie das Bildmaß $\mathbb{P}T^{-1}$.

Hausaufgabe 1.IV (Dynkin-Systeme)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Ein Menge $\mathcal{D}$ von Teilmengen von Ω heißt *Dynkin-System*, falls gilt:

1) $\Omega \in \mathcal{D}$,

2) *Komplementstabilität*: $D \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; D^c \in \mathcal{D}$,

3) *σ-$\cup$-Stabilität:* Für jede paarweise disjunkte Familie $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}$ gilt

$$\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} D_n \in \mathcal{D}.$$

a) Geben Sie ein Beispiel eines Dynkin-Systems $\mathcal{D}$ für $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ an derart, dass $\mathcal{D}$ <u>keine</u> σ-Algebra ist.

b) Zeigen Sie, dass ein Dynkin $\mathcal{D}$ über Ω genau dann eine σ-Algebra ist, wenn $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil ist, d.h. wenn für beliebige $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ auch $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ gilt.

c) Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen von Ω. Bezeichne $\delta(\mathcal{E})$ das kleinste Dynkin-System über Ω, das $\mathcal{E}$ enthält. Zeigen Sie, dass folgende Implikation gilt: Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, so gilt: $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.