Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 2

Abgabe bis **Donnerstag, 31.10.2013, 14:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 2.I

a) Zeigen Sie, dass eine Verteilungsfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

b) Seien C die Cantormenge und F die in der Vorlesung konstruierte Funktion.
   (i) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
   (ii) Zeigen Sie, dass F keine Dichte bzgl. dem Lebesgue-Maß besitzt.
   (iii) Sei μ das zu F gehörige Maß. Zeigen Sie, dass $\mu(C^c) = 0$ gilt.

Hausaufgabe 2.II

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *einfach*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=1}^{n} c_m \mathbb{1}_{A_m}(\omega),$$

wobei die $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ reelle Konstanten und $A_m \in \mathcal{F}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass die Menge der $\mathcal{F}$-messbaren Abbildungen die kleinste Menge von Abbildungen ist, die die einfachen Funktionen enthält und unter punktweisem Limes abgeschlossen ist.

b) Seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Benutzen Sie Teil a) um zu zeigen, dass Y genau dann messbar bzgl. $\sigma(X)$ ist, wenn es eine messbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass $Y = f(X)$.

Hausaufgabe 2.III

(a) Sei X eine reelle Zufallsvariable mit stetiger Dichte f bzgl. dem Lebesgue-Maß. Es existiere ein Intervall $[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, derart, dass $f = 0$ auf $[\alpha, \beta]^c$ gilt. Sei g eine streng monoton wachsende, auf (α, β) differenzierbare Abbildung mit $g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) > 0$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$.

(i) Zeigen Sie, dass $g(X)$ die Dichte $d_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, definiert durch

$$d_g(y) = \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} \text{ für } y \in (g(\alpha), g(\beta)) \text{ und } 0 \text{ sonst.}$$

(ii) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Dichte

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Nutzen Sie Teil (i), um die Dichte der Zufallsvariablen $Y = \exp(X)$ zu berechnen.
Anmerkung: Die Verteilung von $\exp(X)$ bezeichnet man als log-*Normalverteilung*.

(b) Die reelle Zufallsvariable X habe Dichte f bzgl. dem Lebesgue-Maß.

(i) Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X^2 und anschließend mittels Differenzieren die Dichte von X^2.

(ii) Bestimmen Sie nun die Dichte von X^2, wenn X normalverteilt ist mit Dichte

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.
Anmerkung: In diesem Fall bezeichnet man die Verteilung von X^2 als χ^2-*Verteilung*.

Hausaufgabe 2.IV

a) Gegeben seien Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ $\mathbb{P}$-f.s. und eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(X)$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt.

b) Sei $d \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich der alle stetigen Funktionen messbar sind.