Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 6

Abgabe bis **Freitag, 6.12.2013, 14:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 6.I

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Zeigen Sie, dass

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right]$$

eine Metrik auf dem Raum der Zufallsvariablen definiert; hierzu prüfen Sie die Eigenschaften (i)-(iii) für beliebige Zufallsvariablen X, Y, Z:

(i) $d(X,Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$ $\mathbb{P}$-f.s.,

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$,

(iii) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$.

b) Zeigen Sie, dass für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \text{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

c) Zeigen Sie, dass der Raum der Zufallsvariablen unter der Metrik $d(\cdot,\cdot)$, die in Teil a) definiert wurde, vollständig ist, d.h., dass aus $d(X_n, X_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ folgt, dass eine Zufallsvariable X_∞ existiert derart, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty$ in Wahrscheinlichkeit.

Hausaufgabe 6.II

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen darauf.

a) Seien die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}[X_1 > x] = \exp(-x)$ für $x \geq 0$ und sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{(i)} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log(n)} = 1 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \frac{M_n}{\log(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

b) Seien die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}[X_1 \leq x], x \in \mathbb{R}$ und sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende reelle Folge und

$$A_n := \big\{ \max\{X_1, \ldots, X_n\} > \lambda_n \big\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[A_n \text{ unendlich oft}] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - F(\lambda_n)\big) = \infty, \\ 0 & \text{falls } \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - F(\lambda_n)\big) < \infty. \end{cases}$$

Hausaufgabe 6.III

Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige, identisch verteilte Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}^2$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei Y_i uniform verteilt auf der Kugel $B_1(0)$ mit Radius 1 um den Ursprung. Sei $X_0 = (1, 0)$ und definieren Sie $X_{n+1} = \|X_n\| Y_{n+1}$ für alle $n \in \{0, 1, \ldots\}$, d.h. X_{n+1} wird mit uniformer Verteilung aus der Kugel $B_{\|X_n\|}(0)$ gewählt. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n} \log(\|X_n\|) \xrightarrow[n\to\infty]{} c \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und berechnen Sie die Konstante c.

Hausaufgabe 6.IV

Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei X_i die Zeit, die zwischen dem Einschalten der i-ten Glühbirne und dem Ausfall der i-te Glühbirne vergeht, und Y_i die Dauer bis sie gegen die $(i+1)$-te Glühbirne ausgetauscht wird. Eine Glühbirne leuchtet unmittelbar nachdem sie eingesetzt wird, und bis sie ausfällt. Wir nehmen an, dass $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige Familien von positiven, unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen sind mit $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$. Für $t \geq 0$ sei R_t die Gesamtzeit bis zum Zeitpunkt t, während der unsere Lampe gebrannt hat. Definieren Sie R_t und zeigen Sie, dass

$$\frac{R_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}[X_i]}{\mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[Y_i]} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$