Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/14

1. Präsenzübung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Präsenzaufgabe 1.I

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ die Menge der Teilmengen A von $\mathbb{R}$ derart, dass entweder A oder A^c abzählbar ist. Sei außerdem $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ definiert durch:

$$\mathbb{P}[A] = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Präsenzaufgabe 1.II

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra, die durch die offenen Mengen in $\mathbb{R}$ erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass alle Intervalle der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, in $\mathcal{A}$ liegen.

b) Zeigen Sie, dass alle offenen Intervalle der Form (a, b), $a < b \in \mathbb{R}$, in $\mathcal{A}$ liegen.

c) Zeigen Sie, dass alle abgeschlossenen Intervalle der Form $[a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$, in $\mathcal{A}$ liegen.

Präsenzaufgabe 1.III

a) Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ und $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ erfüllt ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Präsenzaufgabe 1.III, dass die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ nicht nur von allen offenen Mengen erzeugt wird, sondern auch von

   (i) allen offenen Intervallen (a, b), $a < b \in \mathbb{R}$,

   (ii) allen abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$,

   (iii) allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 1.IV

Für jede Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ einer Menge Ω in eine Menge Ω' und jedes Mengensystem $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ zeige man: $T^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{E}'))$.