Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/14

$5\frac{1}{2}$. Präsenzübung zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Präsenzaufgabe $5\frac{1}{2}$.I

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X Zufallsvariablen mit Werten in $(E, \mathcal{E})$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\big[\limsup A_n\big] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\big[\liminf A_n\big] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n].$$

b) Sei Ω ein abzählbarer Raum und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ in Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}$ die Konvergenz $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ $\mathbb{P}$-f.s. folgt.

Präsenzaufgabe $5\frac{1}{2}$.II

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, unabhängiger Zufallsvariablen darauf.

a) Zeigen Sie, dass $\sup X_n < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. genau dann, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big[X_n > A\big] < \infty.$$

b) Sei $\mathbb{P}[X_n = 1] = p_n$ und $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - p_n$. Zeigen Sie, dass

(i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}$ genau dann, wenn $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

(ii) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\mathbb{P}$-f.s. genau dann, wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.