Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Diana Kämpfe

10. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe 17. Januar 2014, bis spätestens 14:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Hausaufgabe 10.I

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion die Verteilung von $X_1 + X_2$, wobei X_1, X_2 unabhängige Zufallsgrößen sind mit

   i) $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$;

   ii) $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2)$.

b) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, gemäß μ verteilte, reellwertige Zufallsgrößen, und sei $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, unabhängig von $X_1, X_2, \dots$. Berechnen Sie die charakteristische Funktion der zufälligen Summe $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

Hausaufgabe 10.II

Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $\varphi(t) = \int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

a) Die diskrete FOURIER-Inversionsformel: $\mu(\{x\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Die PLANCHEREL'sche Gleichung: $\int_{\mathbb{R}} \mu^2(\{x\})\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t.$

c) Ist $\mathbb{P}(X \in h\mathbb{Z}) = 1$ für $h > 0$, dann gilt $\varphi(2\pi/h + t) = \varphi(t)$, und damit

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{h}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } x \in h\mathbb{Z}.$$

Hausaufgabe 10.III

a) Sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion $\varphi_X(t)$. Zeigen Sie, dass $\varphi_X(t)$ genau dann reellwertig ist, wenn X und $-X$ dieselbe Verteilung haben.

b) Sei X_n normalverteilt mit Erwartungswert γ_n und Varianz $\sigma_n^2 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $X_n \Rightarrow X$ für $n \to \infty$ für eine Zufallsgröße X. Zeigen Sie, dass $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in [0, \infty)$ existieren mit $\gamma_n \to \gamma$ und $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ für $n \to \infty$. Folgern Sie für den Fall $\sigma^2 > 0$, dass X normalverteilt ist mit Erwartungswert γ und Varianz σ^2.

c) Zeigen Sie, dass falls X_n und Y_n unabhängig sind für $1 \le n \le \infty$, $X_n \Rightarrow X$ und $Y_n \Rightarrow Y$ für $n \to \infty$, dann gilt $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$ für $n \to \infty$.

Hausaufgabe 10.IV

a) Sei $(\mu_i)_{i\in I}$ eine straffe Familie von Maßen, d.h. $\sup_i \mu_i([-M,M]^c) \to 0$ für $M \to \infty$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen charakteristischen Funktionen $(\varphi_i)_{i\in I}$ gleichgradig gleichmäßig stetig sind, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle i mit $|h| < \delta$ gilt: $|\varphi_i(t+h) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$.

b) Zeigen Sie: Falls $\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$ für $n \to \infty$, so konvergiert die charakteristische Funktion $\varphi_n \to \varphi_\infty$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf kompakten Mengen,d.h für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ gilt: $\sup_{s\in K} |\varphi_n(s) - \varphi(s)| \to 0$ für $n \to \infty$.