11. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe 24. Januar 2014, bis spätestens 14:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Diana Kämpfe PF 84)*. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Hausaufgabe 11.I

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, reellwertiger Zufallsgrößen mit charakteristischer Funktion φ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Folgern Sie:

a) Falls $\varphi'(0) \equiv ia$ für ein $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert S_n/n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen a.

b) Wenn S_n/n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen ein $b \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert $\varphi(t/n)^n$ für $n \to \infty$ gegen e^{ibt}.

Hausaufgabe 11.II

Zeigen Sie mit Hilfe des allgemeinen zentralen Grenzwertsatzes die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Interpretieren Sie die rechte Seite der Gleichung mit Hilfe der Verteilung der Summe von n unabhängigen, $\mathrm{Poi}(1)$-verteilten Zufallsgrößen.

Hausaufgabe 11.III

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, reellwertiger Zufallsgrößen mit $X_i \geq 0$, $\mathbb{E}[X_i] = 1$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0,\infty)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{n} \Rightarrow \frac{\sigma}{2}\mathcal{X} \qquad \text{für } n \to \infty,$$

wobei $\mathcal{X}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße ist.

Hausaufgabe 11.IV

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, reellwertiger Zufallsgrößen und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $\mathbb{P}(X_m = m) = \mathbb{P}(X_m = -m) = m^{-2}/2$ und $\mathbb{P}(X_m = 1) = \mathbb{P}(X_m = -1) = (1 - m^{-2})/2$, $m \in \mathbb{N}$, dann gilt zwar $\mathrm{Var}(S_n)/n \to 2$ für $n \to \infty$ aber dennoch $S_n/\sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{X}$ für $n \to \infty$, wobei $\mathcal{X}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße ist.

b) Gilt $|X_i| \leq M$ und $\sum_i \mathrm{Var}(X_i) = \infty$, dann folgt $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)} \Rightarrow \mathcal{X}$ für $n \to \infty$, wobei $\mathcal{X}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße ist.