12. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe 31. Januar 2014, bis spätestens 14:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Hausaufgabe 12.I
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $d(\mu, \nu) := \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}}$ definiert eine Metrik für Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf $\mathbb{Z}$.

b) $d(\mu_n, \mu) \to 0$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn $\mu_n \Rightarrow \mu$ mit $n \to \infty$.

c) Sei $\delta > 0$. Dann ist $d(\mu, \nu) \leq \delta$ genau dann, wenn Zufallsgrößen X und Y mit Verteilungen μ und ν existieren, so dass $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \delta$.

Hausaufgabe 12.II
Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, auf $\{1, 2, \dots, n\}$ gleichverteilter Zufallsgrößen und $\tau_k^n := \inf\{m : |\{X_1, \dots, X_m\}| = k\}$. Dann ist $\tau_1^n = 1$ und für $2 \leq k \leq n$ sind $\tau_k^n - \tau_{k-1}^n$ unabhängig und geometrisch verteilt zum Parameter $1 - (k-1)/n$. Zeigen Sie:

a) Falls $k_n/\sqrt{n} \to \lambda \in [0, \infty)$, dann gilt $\tau_k^n - k \Rightarrow \mathrm{Poi}(\lambda^2/2)$ für $n \to \infty$.

b) Sei $\mu_{n,k} = \mathbb{E}[\tau_k^n]$ und $\sigma_{n,k}^2 = \mathrm{Var}(\tau_k^n)$. Falls $k_n/n \to a \in (0, 1)$, dann folgt $(\tau_k^n - \mu_{n,k})/\sqrt{n} \Rightarrow \sigma\mathcal{X}$ für $n \to \infty$, wobei $\mathcal{X}$ eine $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsgröße ist.

Hausaufgabe 12.III (Abstände)
Sei T_n die Zeit des n-ten Eintreffens in einem Poisson-Prozeß mit Rate λ. Weiter seien $U_1, U_2, \dots, U_n$ unabhängig, uniform verteilt auf $(0, 1)$ und V_k^n die k-test kleinste Zahl in $\{U_1, \dots, U_n\}$. Zeigen Sie:

a) Die Vektoren $(V_1^n, \dots, V_n^n)$ und $(T_1/T_{n+1}, \dots, T_n/T_{n+1})$ haben die gleiche Verteilung.

b) Ist $\lambda = 1$, $V_0^n = 0$ und $V_n^{n+1} = 1$, dann gilt $nV_k^n \Rightarrow T_k$.

Hausaufgabe 12.IV (Ausdünnung)
Seien N eine $\mathrm{Poi}(\lambda)$-verteilte Zufallsgröße und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}(X_i = j) = p_j$ für $j = 0, 1, \dots, k$ und $\sum_{j=0}^{k} p_j = 1$. Weiter seien auch $X_1, X_2, \dots$ und N unabhängig, und es wird definiert $N_j := |\{i \leq N : X_i = j\}|$. Leiten Sie her, dass $N_0, N_1, \dots, N_k$ unabhängig sind und, dass N_j eine $\mathrm{Poi}(\lambda p_j)$-verteilte Zufallsgröße ist.