

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 1

Abgabe bis **Donnerstag, 12.4.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 1.I (Eindeutigkeit durch endlichdimensionale Verteilungen)

Sei T ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{X} = (X_t)_{t \in T}$ ein stochastischer Prozess darauf. Zeigen Sie, dass die Verteilung $\mathbb{P}\mathbb{X}^{-1}$ von \mathbb{X} eindeutig durch die *endlichdimensionalen Verteilungen*

$$\{\mathbb{P}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})^{-1} \mid n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T\}$$

bestimmt ist.

Übungsaufgabe 1.II (Stetige Pfade der Brownschen Bewegung)

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Brownsche Bewegung Satz 2.8 (Satz von Kolmogoroff) genügt. Folgern Sie, dass wir nun annehmen dürfen, dass die Brownsche Bewegung stetige Pfade aufweist.

Übungsaufgabe 1.III (Stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)

a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\alpha > 0$ einen Gaußprozess $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ gibt mit

$$\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2\alpha} \exp(-\alpha|s - t|) \quad \forall s, t \geq 0.$$

b) Geben Sie die endlich-dimensionalen Verteilungen μ_{t_1, \dots, t_n} von \mathbb{X} mit Hilfe ihrer Dichten an.

c) Zeigen Sie, dass es einen *stetigen* Gaußprozess mit diesen endlich-dimensionalen Verteilungen gibt.

Hinweis zu a): $\exp(-\alpha|s - t|)$ ist die charakteristische Funktion einer Cauchy-Verteilung mit Dichte f_α . Drücken Sie $\sum_{i,j=1}^n \exp(-\alpha|t_i - t_j|) \lambda_i \lambda_j$ mit Hilfe dieser charakteristischen Funktion aus und schreiben Sie um in Form eines Integrals, dessen positiver Integrand das Quadrat einer komplexen Zahl enthält.

Übungsaufgabe 1.IV (Vortragsvorbereitung)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 16.4.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Erläutern Sie die Konstruktion der Brownschen Bewegung.