Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 10 *2. Version*

Abgabe bis **Donnerstag, 28.6.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 10.I

Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}_n$ die eindimensionale Standardnormalverteilung und $\mathbb{Q}_n$ die Normalverteilung mit Erwartungswert $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und Varianz 1 für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_n$ und $\mathbb{Q}^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{Q}_n$ äquivalent sind und geben Sie die Dichte $\frac{d\mathbb{P}^{(n)}}{d\mathbb{Q}^{(n)}}$ an.

(ii) Formulieren Sie eine Bedingungen an $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sodass $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^\infty \mathbb{P}_n$ und $\mathbb{Q} = \bigotimes_{i=1}^\infty \mathbb{Q}_n$ äquivalent sind. Geben Sie die Dichte $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ in diesem Fall an.

Übungsaufgabe 10.II (*Poisson-Prozess*)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$ auf einem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$. Definiere

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad N_t := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{\{S_n \le t\}} \quad \text{für } t \ge 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Zuwächse von $(N_t)_{t\ge0}$ unabhängig sind und *Poisson*-verteilt, d.h.

$$\mathbb{P}\big[N_t - N_s = k\big] = \frac{\big(\lambda(t-s)\big)^k}{k!} \exp\big(-\lambda(t-s)\big) \quad \text{für alle } s,t \in \mathbb{R}, t > s \text{ und } k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\big(N_t - \lambda t\big)_{t\ge0}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\mathcal{F} = \big(\sigma(N_s, s \le t)\big)_{t\ge0}$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\big((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t\big)_{t\ge0}$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}$ ist.

Übungsaufgabe 10.III

Sei $\mathbb{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger stochastischer Prozess mit $X_0 = 0$ auf einem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ wobei $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ die von $\mathbb{X}$ generierte Filtration sei. Es sei außerdem für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ der Prozess $\mathbb{M}^\alpha = (M_t^\alpha)_{t\geq 0}$, definiert durch

$$M_t^\alpha = \exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \quad \text{für } t \geq 0,$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist.
Hinweise:

1. Eine ZV X ist $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt genau dann, wenn $\mathbb{E}[\exp(\lambda X)] = \exp(\lambda^2/2)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Falls X eine ZV und $\mathcal{B}$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ sodass

   $$\mathbb{E}[\exp(\lambda X)|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[\exp(\lambda X)] < \infty$$

   für λ in einer Umgebung von 0, so sind X und $\mathcal{B}$ unabhängig.

Übungsaufgabe 10.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 2.7.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Abschätzung für die d-dimensionale Brownsche Bewegung $\mathbb{B} = (B_1, \ldots, B_d)$, wobei $B_1, \ldots, B_d$ unabhängige Brownsche Bewegungen seien.

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} |\mathbb{B}_s| \geq \delta\right] \leq 2d \exp\left(-\frac{\delta^2}{2dt}\right) \quad \text{für } \delta > 0.$$

Beweisen Sie zunächst den Fall $d = 1$. Folgern Sie dann den allgemeinen Fall.